

# 過膨張ノズルを通る低レイノルズ数圧縮性流れに関する研究

2020年4月

八木 奏一郎

## 目次

目次	.....	i
記号	.....	iv
第1章 序論		
1.1 本研究の背景	.....	1
1.2 本研究の目的	.....	12
第2章 ラバルノズルの流れに関する理論		
2.1 ラバルノズルの流れ	.....	13
2.2 一次元定常等エントロピー流れ	.....	16
2.3 垂直衝撃波	.....	19
第3章 過膨張流れ		
3.1 斜め衝撃波	.....	20
3.2 衝撃波と境界層の干渉に関する理論	.....	25
3.3 ノズル内の衝撃波分布	.....	28
第4章 光学的可視化に関する研究		
4.1 シュリーレン法	.....	31
4.2 レインボーシュリーレン法	.....	37
4.3 マッハ・ツェンダー干渉計	.....	44
第5章 実験装置		
5.1 二次元ベンチュリノズル	.....	49
5.2 レインボーシュリーレン法	.....	51
5.2.1 実験装置の構成	.....	51
5.2.2 レインボーフィルター	.....	54
5.2.3 レインボーシュリーレン法の実験方法	.....	55
5.3 マッハ・ツェンダー干渉計	.....	56
5.3.1 実験装置の構成	.....	56
5.3.2 高速度カメラ	.....	57

5.3.3	マッハ・ツェンダー干渉計の実験方法	.....	58
5.3.4	干渉縞写真の解析方法	.....	59
5.4	レイノルズ数	.....	62
第6章	数値計算	.....	63
6.1	基礎方程式	.....	63
6.2	乱流モデル(k- $\omega$ SSTモデル)	.....	65
6.3	一般座標系における基礎方程式	.....	67
6.4	対流項の差分	.....	70
6.5	粘性項の差分	.....	73
6.6	時間積分の評価	.....	73
6.7	境界条件	.....	74
第7章	臨界ノズルを通る低レイノルズ数流れの数値計算		
7.1	数値計算の妥当性検証結果	.....	76
7.1.1	流出係数の数値計算結果	.....	76
7.1.2	境界層内の速度分布	.....	77
7.2	低レイノルズ数域におけるノズル内の流れ場	.....	77
7.2.1	ノズル内の静圧分布	.....	77
7.2.2	ノズル内のマッハ数分布	.....	79
7.2.3	圧力・マッハ数コンター図	.....	80
7.3	本章のまとめ	.....	81
第8章	低レイノルズ数過膨張流れにおける衝撃波の特性		
8.1	レインボーシュリーレン法による実験結果	.....	82
8.1.1	レインボーシュリーレン写真	.....	82
8.1.2	はく離圧力比の理論曲線との比較	.....	84
8.1.3	はく離圧力比とはく離マッハ数との関係	.....	85
8.2	レーザーシュリーレン法とマッハ・ツェンダー干渉計による実験結果	.....	87
8.2.1	レーザーシュリーレン写真	.....	87
8.2.2	マッハ・ツェンダー干渉縞写真	.....	89
8.3	本章のまとめ	.....	91

第9章	低レイノルズ数過膨張流れの衝撃波による境界層のはく離		
9.1	数値計算結果の妥当性検証	.....	92
9.1.1	レインボーシュリーレン写真	.....	92
9.1.2	二次元ベンチュリノズル内の数値計算結果	.....	93
9.1.3	壁面静圧分布	.....	93
9.1.4	ノズル中心軸上の密度分布	.....	94
9.2	レイノルズ数が及ぼすノズル内部衝撃波構造への影響	.....	95
9.2.1	レイノルズ数別のマッハ数分布	.....	95
9.2.2	レイノルズ数別の静圧分布	.....	96
9.3	衝撃波が誘発する境界層のはく離	.....	98
9.3.1	低レイノルズ数流れにおけるノズル壁面の圧力分布	.....	98
9.3.2	衝撃波-境界層はく離による圧力上昇	.....	99
9.3.3	干渉点における境界層内の速度分布	.....	100
9.4	本章のまとめ	.....	101
第10章	結論		
10.1	臨界ノズルを通る低レイノルズ数流れの数値計算	.....	102
10.2	低レイノルズ数過膨張流れにおける衝撃波の特性	.....	102
10.3	低レイノルズ数過膨張流れの衝撃波による境界層のはく離	.....	103
参考文献		.....	104
謝辞		.....	106

## 記号

本文で用いた主な記号は以下のとおりである。この他に使用した記号を用いた箇所ではその定義を本文中に明記してある。

	<b>記号</b>		$\Gamma$	:	気体力学関数
$A$	:	断面積	$\gamma$	:	比熱比
$a$	:	音速	$\delta$	:	境界層厚さ
$C_d$	:	流出係数	$\delta^*$	:	排除厚さ
$D$	:	ノズル直径	$\mu$	:	粘性係数
$e$	:	内部エネルギー	$\rho$	:	密度
$H$	:	ノズル高さ			
$h$	:	エンタルピー			
$L$	:	ノズル長さ			<b>添え字</b>
$M$	:	マッハ数	0	:	よどみ状態
$\dot{m}$	:	質量流量	atm	:	大気状態
$p$	:	圧力	b	:	背圧
$Q$	:	体積流量	ch	:	チョーク状態
$\dot{q}$	:	熱量	e	:	ノズル出口
$R$	:	ガス定数	ex	:	実験値
$Re$	:	レイノルズ数	th	:	理論値
$s$	:	エントロピー	t	:	スロート
$T$	:	温度	w	:	壁面
$t$	:	時間	*	:	臨界状態
$u$	:	流速	$\infty$	:	主流
$W$	:	ノズル幅			
$x$	:	流れ方向距離			
$y$	:	高さ方向距離			
$z$	:	軸方向距離			
$r$	:	半径方向距離			
$\alpha$	:	マッハ角			

# 第1章 序論

## 1.1 本研究の背景

近年、微小電気機械システム (MEMS) の設計と製造により、質量流量計、小型衛星スラスタ、マイクロジェットエンジンといった、臨界ノズルを含むマイクロスケール、つまり低レイノルズ数)の流れ場を理解する必要性が高まっている[4].

臨界ノズルは、簡易な構造で、かつ正確に質量流量の測定を実現できるため信頼性が高く、質量流量計や他のガス流量計の校正用ノズル、更には圧力アイソレーターなどの多くの産業用途で重要な役割を果たしている. ノズル下流の背圧とノズル上流のよどみ圧との比(背圧比)が臨界背圧比以下に維持されている場合、ノズルスロートにおける質量流量は常に一定であり、ノズルスロート下流の流れ場の変化には依存しない. 臨界ノズルの原理は、上述の臨界状態を応用したものである.

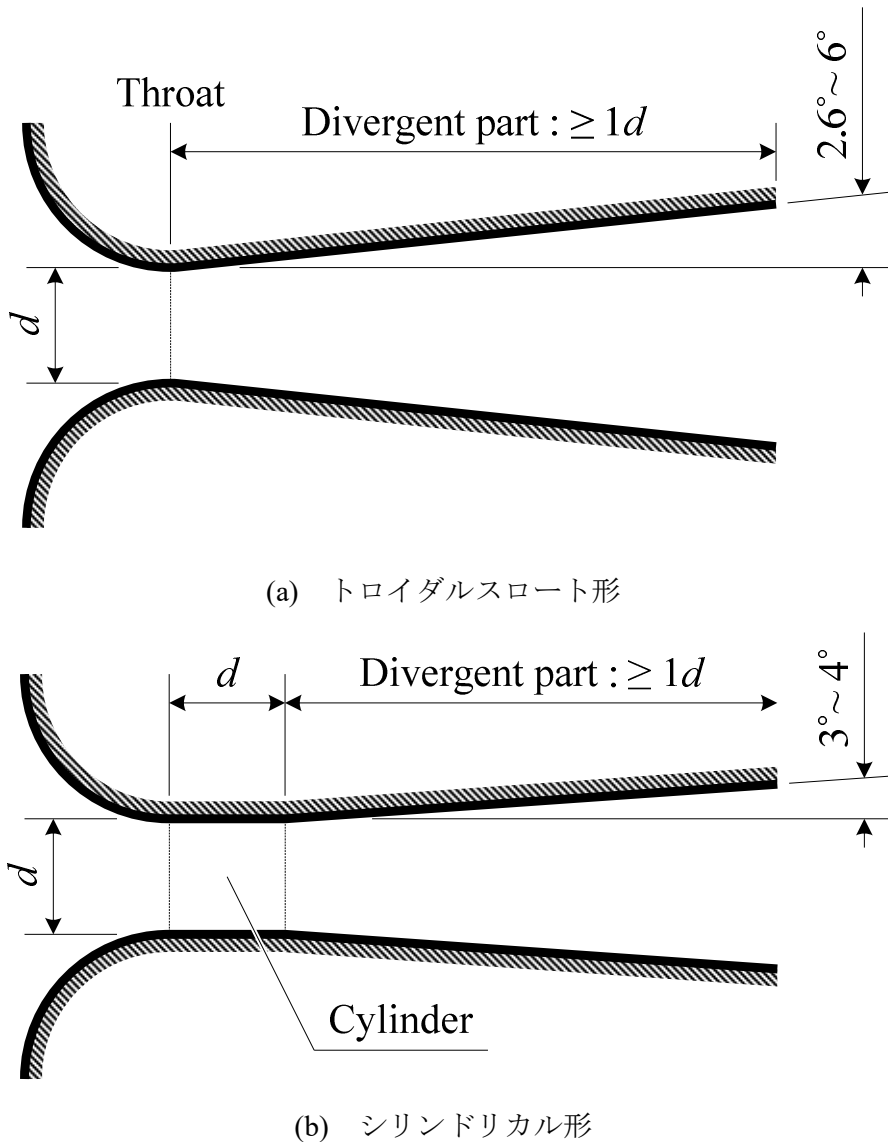


図 1.1 臨界ノズルの模式図

このような臨界ノズルを用いた臨界流量計については、「ISO 9300 : Measurement of gas flow by means of critical flow Venturi nozzles」(初版 : 1990 年, 国際標準化機構) [2] や「JIS B 7566 : 気体用流量計—器差試験方法」(2003 年, 日本工業規格) [3] で規格されている。これらの規格では, 図 1.1 に示すトロイダルスロート形ベンチュリノズルとシリンドリカルスロート形ベンチュリノズルの二つのノズル形状が規格されている他に, 測定方法や流出係数の算出方法などが記載されている。トロイダルスロート形ベンチュリノズルは, 図 1.1(a) に示すように円環状の先細部と開き角が  $2.6 \sim 6^\circ$  の広がり部が連続的な曲線で構成されている。一方, シリンドリカルスロート形ベンチュリノズルは, 図 1.1(b) に示すように円環を四分割した形状の先細部にスロート直径と等しい長さをもつ直管を取り付けた後,  $3 \sim 4^\circ$  の範囲でディフューザを取り付けた形状である。したがって, トロイダルスロート形よりもシリンドリカルスロート形の方が容易に製作でき, スロート部も明確に規定できるという利点がある。しかし, 実際には直管部分があることにより境界層が発達するため, 利点に反しスロート部が明確に定義出来ない。また, トロイダルスロート形よりも圧力損失は大きくなってしまう。ゆえに, 製作技術が進歩している現在ではトロイダルスロート形が主流である。このように, 臨界ノズルによる高精度な流量測定を行うためには, 流体の粘性が及ぼす影響を明確にすることが重要であり, この影響を表わす指標として以下に述べる流出係数が用いられる。

臨界ノズル内の流れを一次元定常等エントロピー流れと仮定すれば, チョークしたときの理論質量流量  $\dot{m}_{th}$  は, 臨界ノズルのスロート断面積を  $A^*$  とすると次式で求められる。

$$\dot{m}_{th} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{RT_0}} \sigma^* \quad (1.1)$$

実際の流れでは, 気体の粘性のため壁面に沿って境界層が形成され, 等エントロピー流れの仮定は成り立たない。また, ノズル先細部では中心線に沿う流線を除いて流線は曲がり遠心力が働き, スロート断面における流れは一様ではない。このため, 臨界ノズルにおける実際の質量流量は  $\dot{m}_{th}$  よりも小さくなる。この影響を表わす指標として流出係数  $C_d$  があり,  $C_d$  は実際の質量流量を  $\dot{m}_{ex}$  とすると以下の式で定義される。

$$C_d \equiv \frac{\dot{m}_{ex}}{\dot{m}_{th}} \quad (1.2)$$

このような流出係数  $C_d$  について, ISO [2] や JIS [3] では次式に示す演算式を用いて算出することができる。

$$C_d = a - b Re_t^{-n} \quad (1.3)$$

ここで、 $Re_t$  はスロート直径を基準にしたレイノルズ数であり、気体の質量流量  $\dot{m}_{ex}$ 、ノズル入口のよどみ状態における粘性係数  $\mu_0$ 、およびスロート直径  $D$  を用いて以下の式で表わされる。

$$Re_t = \frac{4\dot{m}_{ex}}{\pi D \mu_0} \quad (1.4)$$

ここで、定数  $a$ 、 $b$ 、 $n$  は表 1.1 に示すようにスロートレイノルズ数に対応した値がそれぞれのノズルに関して与えられている。以上のような手順により臨界ノズルの流出係数を求めることができるが、規格されているスロートレイノルズ数の範囲は  $10^4 \sim 10^7$  程度であり、これは比較的流量の大きな場合のみに対応している。ゆえに、微小流量測定のためノズルの直径が非常に小さくなるとスロートレイノルズ数も小さくなるためこの規格は適当ではない。

表 1.1 臨界ノズル定数の設定

Toroidal throat Venturi nozzle		Cylindrical throat Venturi nozzle	
$2.1 \times 10^4 < Re_t < 2.3 \times 10^7$	$a = 0.9959$ $b = 2.720$ $n = +0.5$	$3.5 \times 10^5 < Re_t < 1.1 \times 10^7$	$a = 0.9976$ $b = 0.1388$ $n = +0.2$

また、低レイノルズ数領域における臨界ノズルのチョーク現象に関する研究は、中尾、高本<sup>[4]</sup>によって行われている。彼らは、窒素ガスについて  $40 \sim 30000$  のレイノルズ数の範囲で、図 1.2 に示すようなラバル型臨界ノズルとベンチュリ型臨界ノズルのチョーク現象を実験的に調査した。その結果、図 1.3 に示すように、チョークが発生したときのノズル上流のよどみ圧力  $p_b$  に対する背圧の比  $p_u$  として定義される臨界背圧比  $p_b/p_u$  は、理論レイノルズ数  $Re_{th}$  の関数であり、異なるノズル形状に対して異なる特性を持つことが示された。また、ISO 9300 に準拠したトロイダルスロートベンチュリノズルにおいて、チョーク条件を満たす最小レイノルズ数は約 40 であり、このときの臨界背圧比  $p_b/p_u$  は約 0.05 にすぎなかった。さらに臨界背圧比  $p_b/p_u$  は、 $Re_{th} = 4000$  付近で極大値を持ち、ディフューザ部の境界層の特性が変化することにより、極小値は  $Re_{th} = 10000$  付近となることがわかった。



また、スロート直径の異なる 5 つのラバル形臨界ノズルの臨界背圧比を整理すると、図 1.4 に示すように、臨界背圧比が理論レイノルズ数のみの関数であり、スロートの直径には依存しないことがわかった。つまり、 $Re_{th}$  が小さくなると従来とは異なる現象がノズル内で起きていることが推測された。

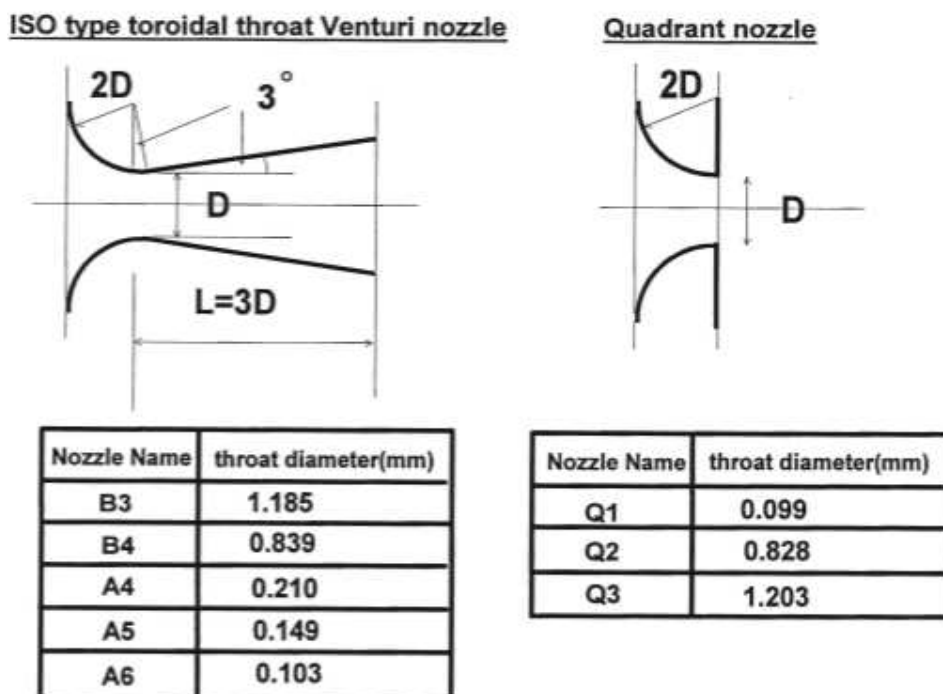
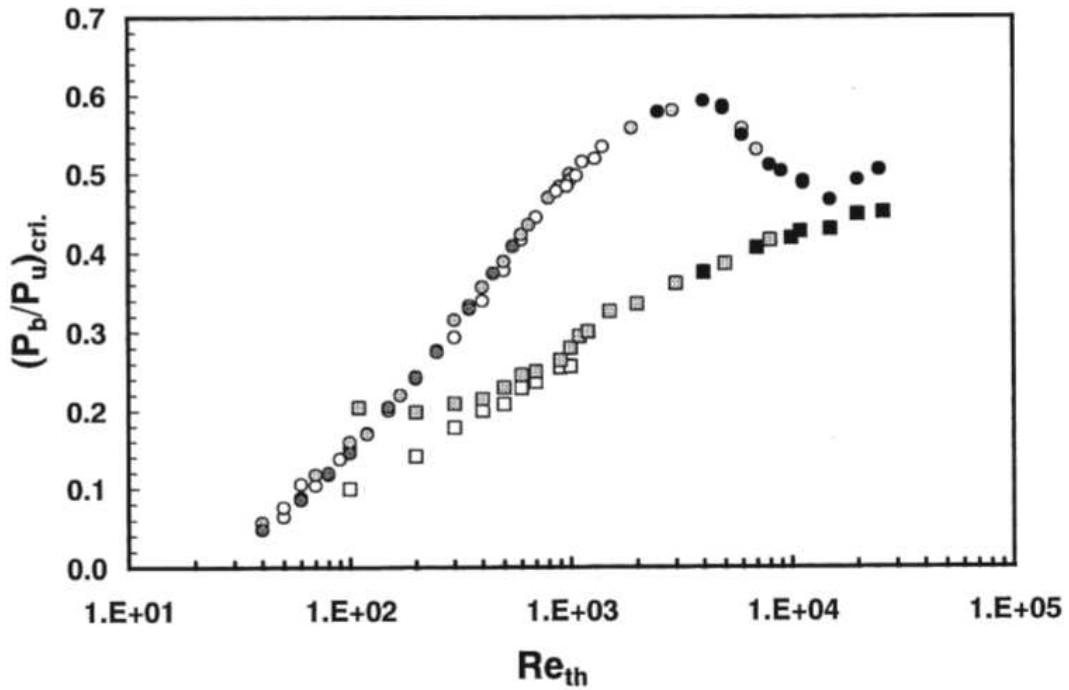
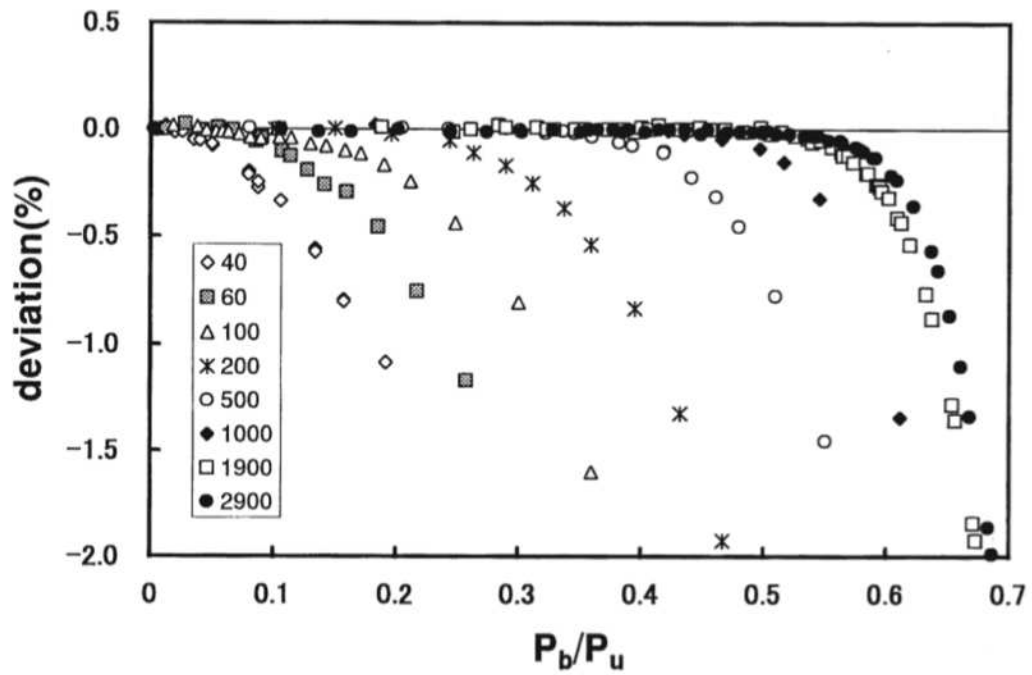


図 1.2 臨界ノズルの模式図

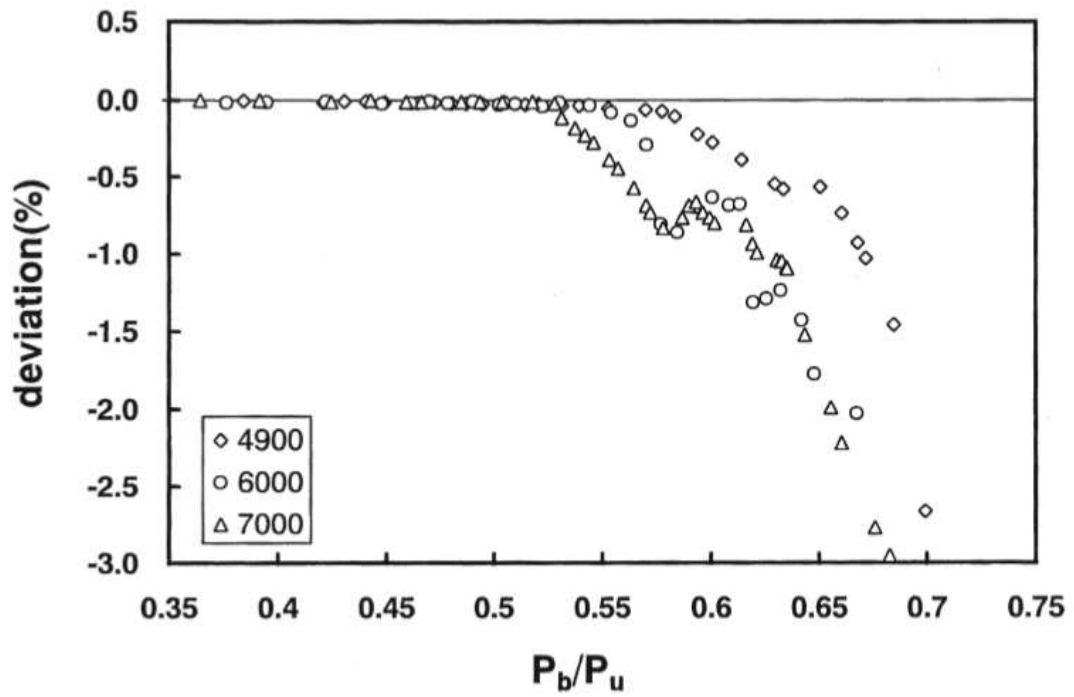


●, B3 nozzle; ○, B4 nozzle; ●, A4 nozzle; ○, A5 nozzle;  
 ●, A6 nozzle; ■, Q3 nozzle; ■, Q2 nozzle; □, Q1 nozzle

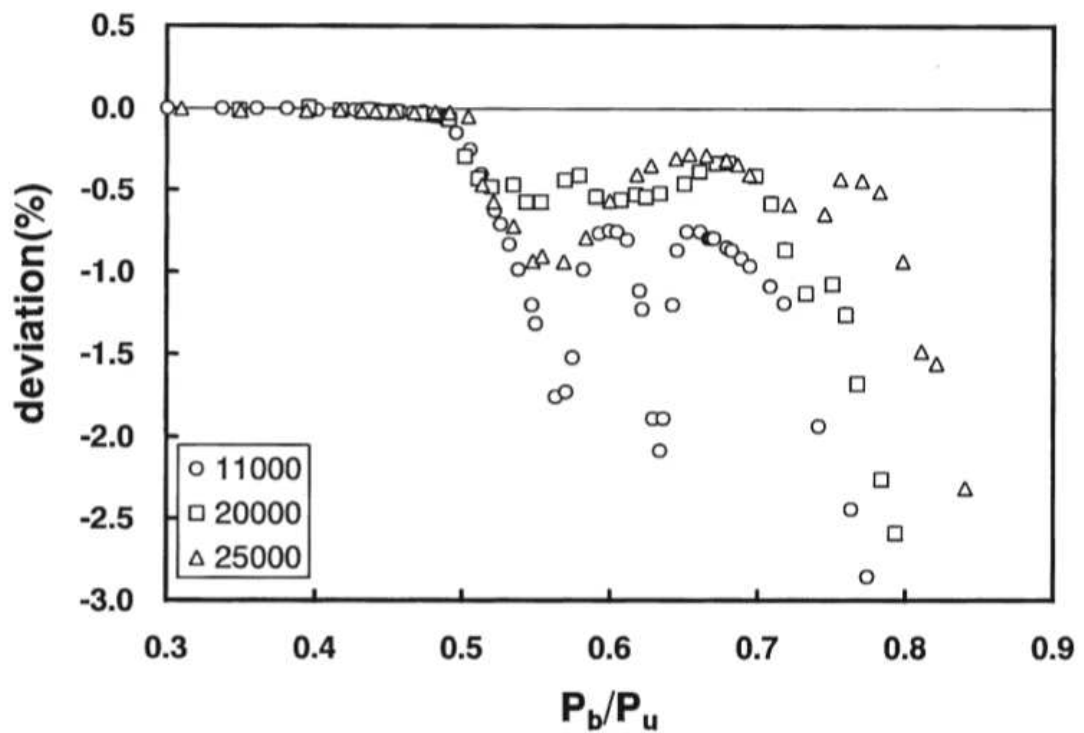
図 1.3 臨界背圧比と理論レイノルズ数の関係



(a)  $40 \leq Re_{th} \leq 2900$



(b)  $4900 \leq Re_{th} \leq 7000$



(c)  $11000 \leq Re_{th} \leq 25000$

図 1.4 背圧比と流出係数の関係

Kim ら<sup>[5]</sup>は、臨界状態にの非定常性について調査するため、図 1.5 に示す計算領域において、背圧  $p_b$  を周期的に変化させ、スロート直径  $D=0.3\text{mm}$  の 4 分円ノズルに及ぼす影響を調査した。その結果、図 1.6 に示すように、スロート直径を代表長さとするレイノルズ数  $Re$  が小さくなるにつれ、ノズル出口からの圧力波がスロート近傍まで伝播し、 $Re=500$  となった場合、圧力波がスロートを超えて上流まで伝播することを明らかにした。さらに、図 1.7 に示すように、スロートにおける質量流量は、圧力波がノズルスロートを超え上流に伝播した場合、背圧変動の影響を受けて大幅に変化することを示した。

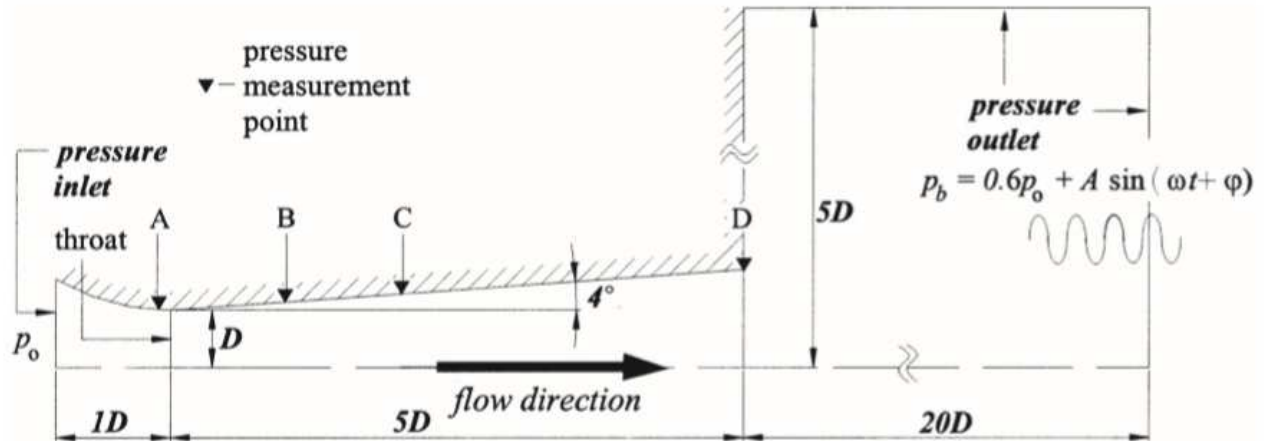
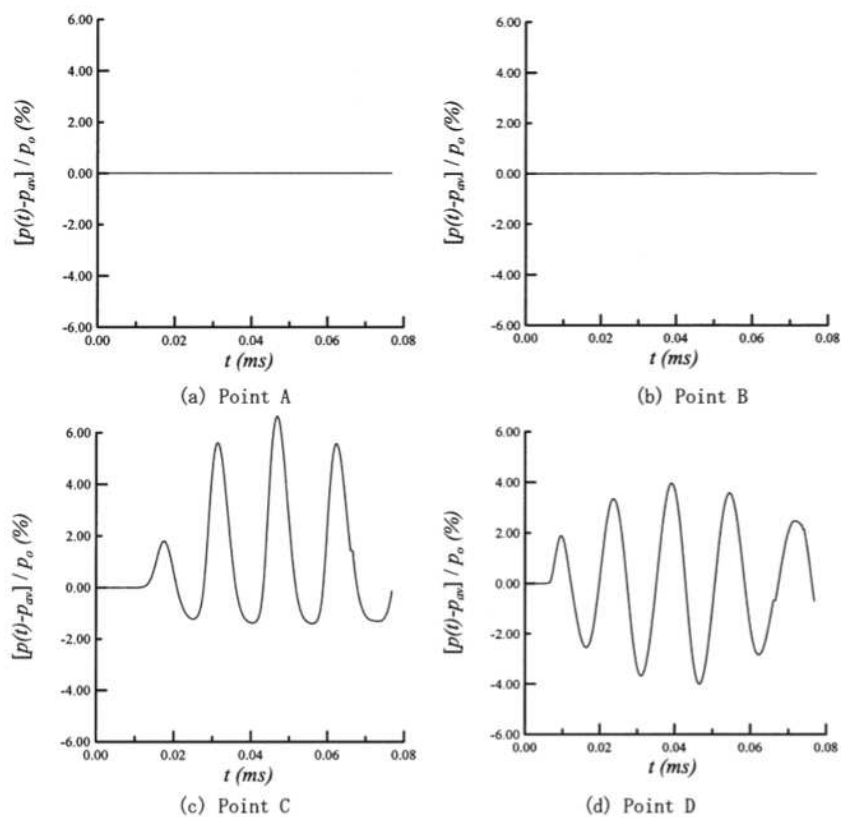
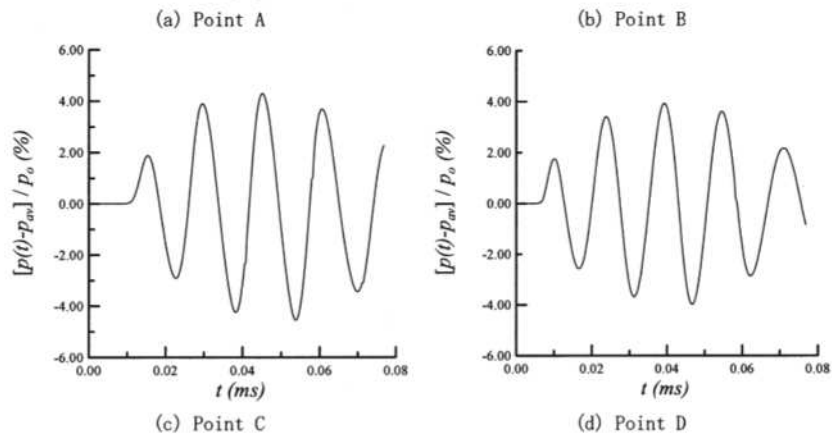
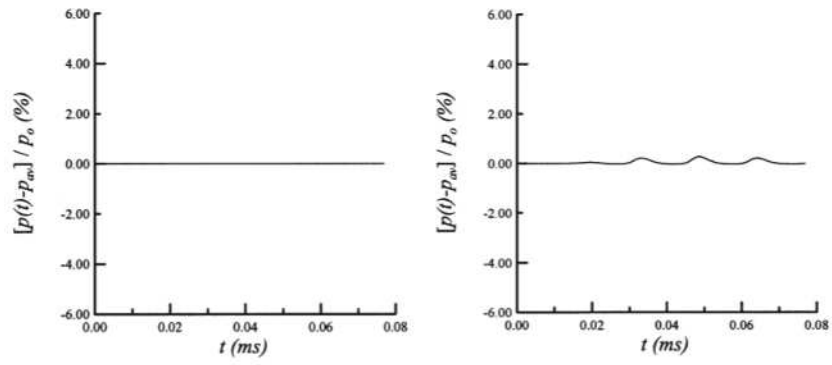


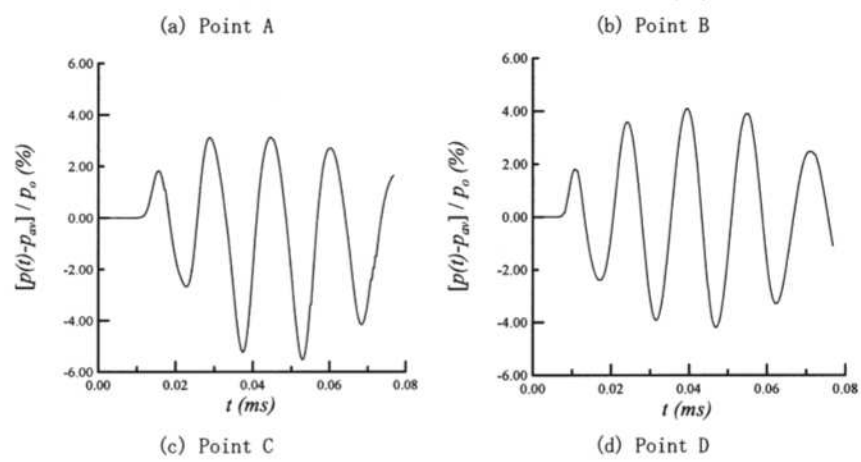
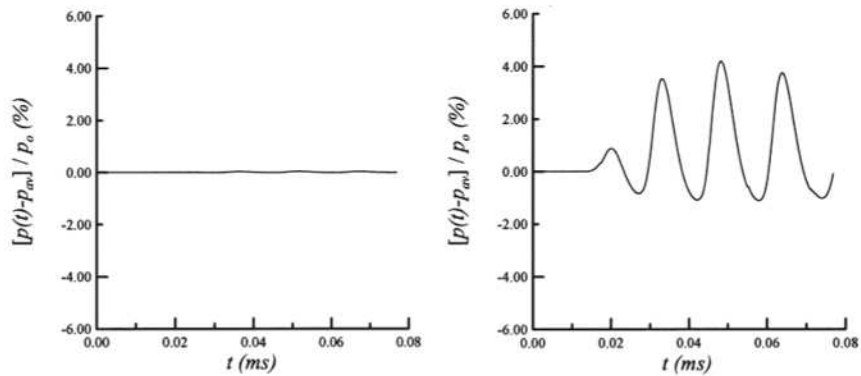
図 1.5 臨界ノズルの数値計算領域



(a)  $Re=7470$



(b)  $Re=3740$



(c)  $Re=1840$

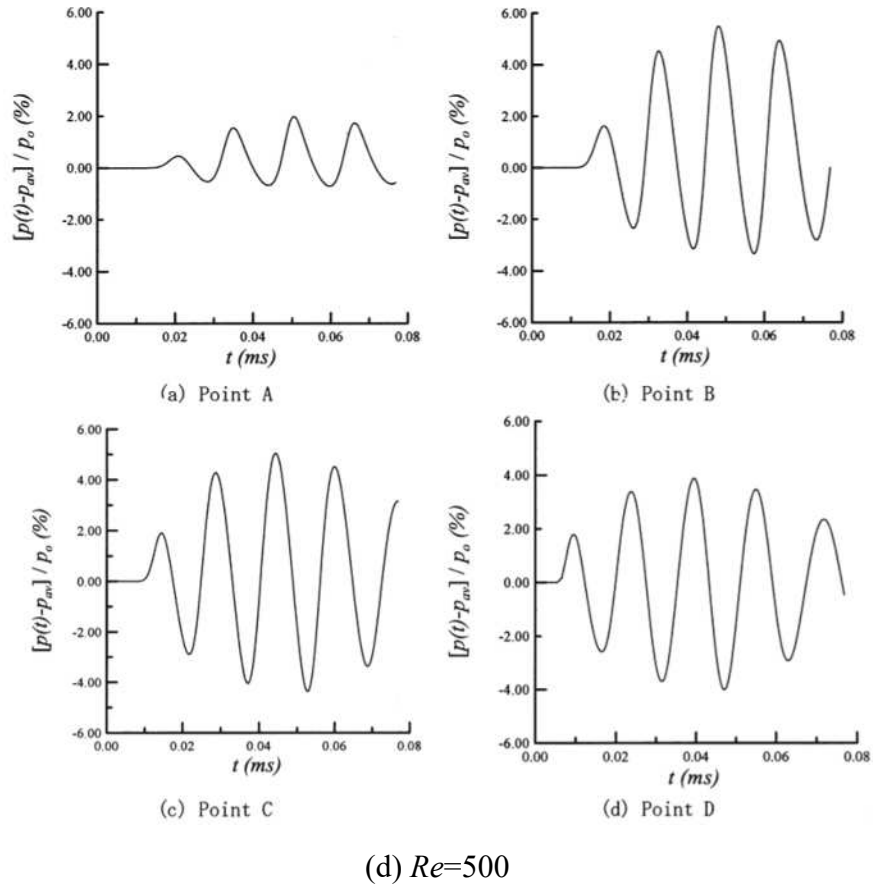


図 1.6 ノズル壁面圧力の時間変動

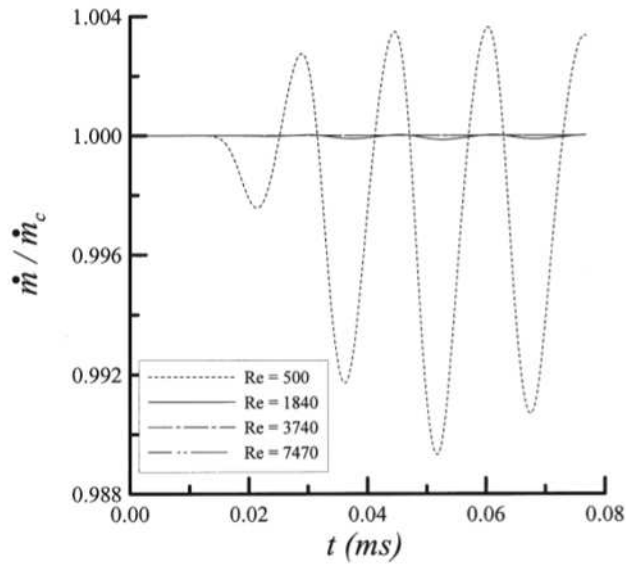


図 1.7 質量流量の時間変動

Von Lavante ら<sup>[6]</sup>は、 $Re_{th} = 10^5 \sim 10^7$  の理論レイノルズ数の範囲にわたり、ISO 9300 に準拠した形状のノズル流れについて、数値的および実験的に調査した。その結果、図 1.8 に示すように、垂直衝撃波がノズル内に存在する状態の背圧比にあるとき、衝撃波によって発生する圧力波のじょう乱がノズルスロートを越えて上流に伝播することで、図 1.9 に示すように臨界ノズルを通る質量流量が時間的に変動する可能性があることを数値的に示した。



図 1.8 ノズル内における等速度分布の時系列データ

一般的にノズル内の流れ場をスロートからディフューザまでの全域にわたって超音速流れにする程度まで背圧比を下げた場合、ノズルを通る質量流量は一定となる。一次元等エントロピー理論に基づいた場合、ノズル内の流れ場を過膨張流れ<sup>[7]</sup>で動作する場合、ノズル内の流れはスロートから下流の領域全体にわたって超音速であり、ノズル出口における静圧は背圧よりも低くなる。しかし、高レイノルズ数における過膨張流れの実際は、スロートからディフューザの間の領域で、衝撃波による急激な圧力の変化に境界層が耐えることができないため、衝撃波と境界層が相互作用することで剥離が発生する。

Arens ら<sup>[8,9]</sup>は、干渉開始点における境界層内の特性速度  $u_1^*$  が衝撃波を通過した後、等エントロピー的によどんだときに境界層のはく離が起こるとして、 $u_1^*$  の点とはく離点を結ぶ一つの流線を考え、その流線に沿うエネルギー式から  $p_s/p_1$  に関する式を導いている。この式を使用することで、過膨張流れにおける境界層のはく離による圧力上昇を予測することができるため、この理論は、過膨張状態で作動することが想定されるロケットエンジンのノズル設計に広く使用されてきた。こうした流れ場のスケールが比較的大きい領域に対して有効であることは広く知られているが、本理論が微小ノズル(低レイノルズ数)に対して適用された例はこれまで報告されていない。

いずれの研究でも、臨界ノズルにおいてレイノルズ数が小さくなると従来とは異なる現象がノズル内で起きていることが推測しているが、どのような流れ場が起きているか不明もしくは、数値計算のみで検証しており、流れ場の実験的な裏付けはない。

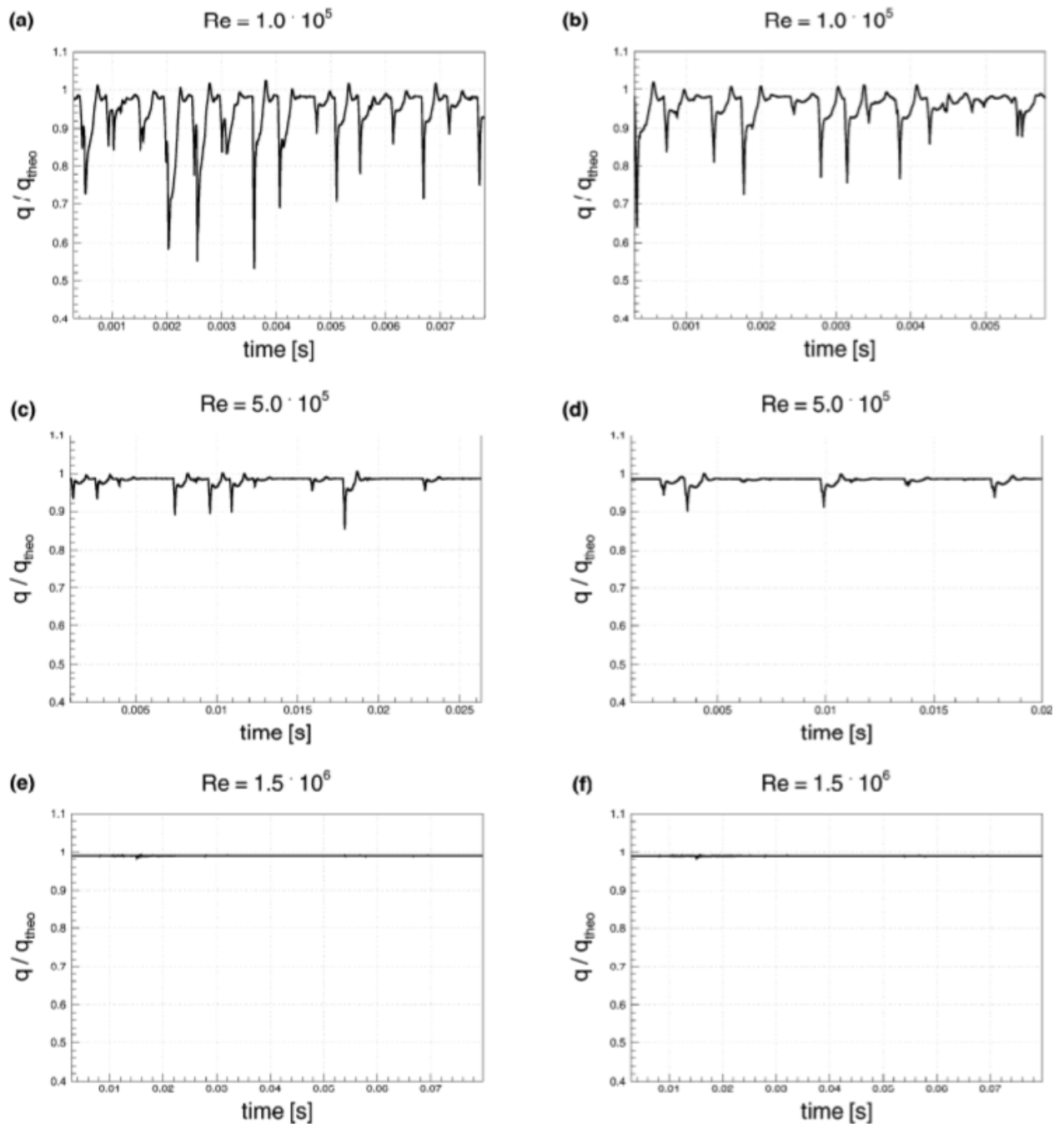


図 1.9 質量流量の時間変動



## 1.2 本研究の目的

本研究の目的は、低レイノルズ数域における過膨張流れの特性を明らかにすることである。まずは円形断面の臨界ノズルを通る過膨張低レイノルズ数流れについて軸対称数値計算によってノズル内の流れ場を調査する。次に、可視化が可能な二次元ベンチュリノズルを通る低レイノルズ数過膨張流れにおける衝撃波の特性を、光学的可視化を用いて実験的に調査する。さらに、二次元ベンチュリノズルを通る過膨張低レイノルズ数流れについて、衝撃波による境界層のはく離に注目し、実験と数値計算によって調査した後、はく離に関する従来の理論<sup>[8,9]</sup>を評価する。

第1章では、臨界ノズルを通る低レイノルズ数流れの従来の研究について述べた後、本研究の目的について述べる。

第2章では、ラバルノズルを通る流れ場について述べた後、流れ場を解くための基本的な理論式について説明する。

第3章では、過膨張数流れに関する理論について述べる。また、それぞれの理論式からノズル内の衝撃波分布を導出する方法について述べる。

第4章では、光学的可視化に関する従来の研究について述べる。

第5章では、本研究で用いた実験装置、実験方法に関して述べる。

第6章では、本研究で用いた数値計算手法について述べる。

第7章では、ISO 9300に準拠した形状の臨界ノズルを通る、低レイノルズ数過膨張流れ場を数値計算により調査したので、その結果について述べる。

第8章では、二次元ベンチュリノズルを通る低レイノルズ数過膨張流れにおける、衝撃波特性について光学的可視化法により実験的に調査したので、その結果について述べる。

第9章では、二次元ベンチュリノズルを通る低レイノルズ数過膨張流れについて衝撃波による境界層のはく離に着目し、実験及び数値計算によって調査したので、その結果について述べる。また、数値計算結果を用いて、はく離に関する従来の理論を評価したので、その結果についても述べる。

第10章では、本論文の結論について述べる。

## 第2章 ラバルノズルの流れに関する理論

1章で述べたトロイダルスロート形ベンチュリノズルやシリンドリカルスロート形ベンチュリノズルは流れを超音速に加速するために、途中にスロートをもつラバルノズルとなっている。本章では、ラバルノズルの流れに関する基本的な理論について述べる。

### 2.1 ラバルノズルの流れ

管の途中にスロートをもつラバルノズルを用いると流れを超音速に加速することが出来る。図 2.1 にラバルノズルにおける静圧分布とマッハ数分布を示す。図 2.1 に示しているように、タンク A とタンク B がラバルノズルを介して接続されており、タンク A の体積は十分大きく、全圧  $p_0$ 、全温度  $T_0$  は一定で、ノズルを通る流れは等エントロピー流れと仮定する。タンク B の圧力（背圧） $p_b$  は、その後に設けられているバルブを開くと減少すると仮定する。背圧  $p_b$  を全圧  $p_0$  より少し下げるとノズル内に流れが生じ、局所静圧  $p$  と全圧  $p_0$  の比  $p/p_0$  とマッハ数  $M$  の分布は図 2.1(b)と(c)の曲線 ab で表され、流れは全域で亜音速である。

背圧  $p_b$  をさらに下げると流量は増加し、図 2.1 1)の点 d で表す圧力  $p_d$  に達すると、スロートにおいて流れはマッハ数  $M = 1$  の臨界状態に達し、圧力とマッハ数の分布は曲線 acd で表される。すなわち流れはノズルの先細部で加速されてスロートでチョークし、末広部で流れは減速されていく。

ノズルの先細部で加速されてスロートでチョークした後もさらに背圧を下げると、マッハ数  $M > 1$  の超音速噴流となり噴流の形状を変える。ここで、ラバルノズルの作動状態を以下に示す。(局所静圧  $p$  の添え字は図 2.1 に示している a~k の状態の時の静圧をさす。

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| (i) $p_d < p_b < p_0$   | 全域で音速流れ                 |
| (ii) $p_b = p_d$        | スロートで音速状態，他の領域では亜音速流れ   |
| (iii) $p_h < p_b < p_d$ | ノズル末広部に垂直衝撃波 [図 2.1(g)] |
| (iv) $p_b = p_h$        | ノズル出口に垂直衝撃波 [図 2.1(h)]  |
| (v) $p_j < p_b < p_h$   | 過膨張 [図 2.1(i)]          |
| (vi) $p_b = p_j$        | 適正膨張，理想的作動状態 [図 2.1(j)] |
| (vii) $p_b < p_j$       | 不足膨張 [図 2.1(k)]         |

以上の 7 つの作動状態である。(iii) 以降の各状態について以下に述べていく。また、一次元等エントロピー流れの関係式及び垂直衝撃波の関係式については次節で述べる。

まず  $p_j < p_b < p_d$  の状態の流れを考える。 $p_b < p_d$  であるので、流れはスロートで必ずチョークするが、等エントロピー流れと仮定すると、 $p_b = p_d$  または  $p_b = p_j$  の二つの解しかないので流

れのどこかで等エントロピー的でない過程が生じていなければならない。その過程とは、流れの粘性の影響や、垂直衝撃波が考えられる。最も簡単な仮定は垂直衝撃波がノズル末広部に発生し、その垂直衝撃波によってエントロピーの増加が起こると考えることである。この衝撃波が立つ位置は圧力比  $p_b/p_0$  によって決まる。いま垂直衝撃波がノズルの末広部のある断面に発生しているとして、すぐ上流のマッハ数を  $M_1$ 、静圧を  $p_1$  とすると、垂直衝撃波直後の静圧  $p_2$  と全圧  $p_0$  の比  $p_2/p_0$  は次節の式(2.18)と式(2.26)より以下の通りとなる。

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_0} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2.1)$$

式(2.1)の右辺の  $M_1$  は距離  $x$  の関数であり、図 2.1 1)の一点鎖線 ch は  $p_2/p_0$  と  $x$  の模式的関係である。 $p_b$  が  $p_d$  と  $p_j$  の値、例えば図 2.1 1)の点 g における値  $p_g$  の場合、衝撃波は点 g を通る亜音速エントロピー流れの曲線 fg と、衝撃波直後の状態を表す曲線 ch との交点 f の断面に立ち、この場合の圧力分布は曲線 acefg となる。この衝撃波は背圧  $p_b$  が  $p_d$  からさらに減少するにつれ、スロートから下流に移動し、点 h の圧力  $p_h$  のときにはノズル出口に達する。この時、ノズル出口において圧力は衝撃波直前の圧力  $p_j$  から直後の圧力  $p_h$  に不連続的に上昇する。 $p_b$  を  $p_h$  より下げた場合には、ノズル末広部の流れが超音速に達しているため、背圧の変化の影響はノズル出口より上流に伝わらず、ノズル内の流れは影響を受けることはなく出口圧力は  $p_j$  に保たれる。そして出口圧力  $p_j$  から背圧  $p_b$  までの圧力変化は、図 2.1 1) (i)の様に、ノズルの外で斜め衝撃波によって行われる。このように背圧  $p_b$  が  $p_j < p_b < p_h$  の範囲ではノズル出口圧力  $p_j$  は背圧  $p_b$  より小さい。すなわち流れはノズル内で背圧より小さい圧力まで膨張する。これを過膨張という。

過膨張となった後さらに背圧  $p_b$  を下げていき、ノズル出口における圧力が  $p_b = p_j$  の状態まで達すると、気体がノズル内で等エントロピー的にちょうど背圧まで膨張し、超音速噴流となる。ラバルノズルは本来超音速流れを得るために用いられるものであるため、この状態はラバルノズルの理想的な作動状態であるといえる。よって、この状態を適正膨張の状態という。

噴流が適正膨張状態となった後さらに背圧  $p_b$  を下げていき、 $p_b < p_j$  の状態になった場合、流れはノズル内で背圧  $p_b$  まで膨張することが出来ず、ノズル出口圧力  $p_j$  は背圧  $p_b$  より高くなる。これを不足膨張という。このような流れでは、図 2.1(k)に示すように、ノズル出口から発生する膨張波によって出口圧力  $p_j$  から背圧  $p_b$  に減少する。過膨張や不足膨張の流れは斜め衝撃波や膨張波を伴い、図 2.1 1)の点 k に示すように圧力はノズル出口より流れに沿って変動する。

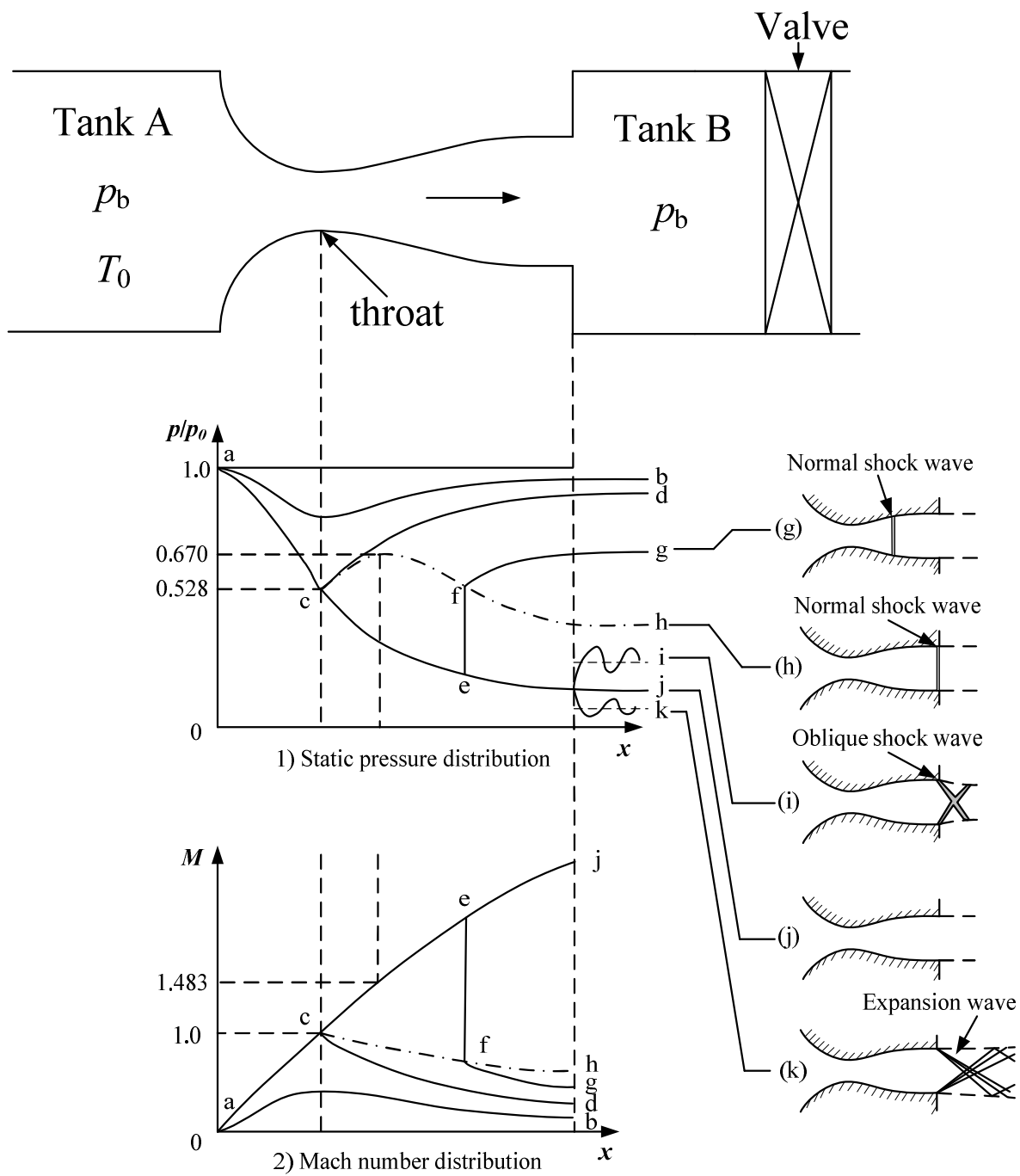


図 2.1 ラバルノズルの流れ

## 2.2 一次元定常等エントロピー流れ

管路や流路の流れにおいて、流体と外部との間に熱の授受がなく、粘性も無視できるとすれば、流体のエントロピーは一定に保たれる。このような等エントロピー流れは、衝撃波や境界層などの不可逆な領域を除くと、実際の流れにも十分よい近似で適用できる。ここでは、一次元定常等エントロピー流れの関係式を導く。

まず、先細ノズルの中心軸を  $x$  軸として、 $x$  軸での先細ノズルの断面積を  $A(x)$ 、圧力を  $p(x)$ 、密度を  $\rho(x)$ 、速度を  $u(x)$  とすると、定常流れにおける質量保存則より、

$$\rho(x)u(x)A(x) = \text{const} \quad (2.2)$$

上式を対数微分すると、

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.3)$$

また、非粘性流れに対する一次元の運動方程式は、

$$u du + \frac{1}{\rho} dp = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.5)$$

等エントロピーの式より、

一次元定常断熱流れに対するエネルギー式は、

$$h + \frac{1}{2}u^2 = H_0 = \text{const} \quad (2.6)$$

この  $H_0$  は、全エンタルピーあるいはよどみエンタルピーと呼ばれる。つまり、その場で断熱的に流れの速度を 0 にしたときに得られるであろうエンタルピーである。完全気体では、

$$h = c_p T, \quad H_0 = c_p T_0 \quad (2.7)$$

より、定圧比熱  $c_p$  を用いて、

$$c_p T + \frac{1}{2}u^2 = c_p T_0 \quad (2.8)$$

$c_p T$  で割ると

$$1 + \frac{u^2}{2c_p T} = \frac{T_0}{T} \quad (2.9)$$

完全気体では、

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \quad (2.10)$$

であるので、式 (2.8) を式 (2.9) に代入して、

$$1 + \frac{(\gamma - 1)u^2}{2\gamma RT} = \frac{T_0}{T} \quad (2.11)$$

音速の式

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (2.12)$$

を用いて、

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)u^2}{2a^2} \quad (2.13)$$

マッハ数  $M = u/a$  より、

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \quad (2.14)$$

この式は、断熱という条件さえ満たされれば、等エントロピー流れでなくても成り立つ。つまり、粘性による損失があっても、衝撃波が発生していても成り立つ関係式である。等エントロピーの状態では、以下の関係式が成立する。

$$\frac{p}{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \text{const} \quad \frac{\rho}{T^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \text{const} \quad (2.15)$$

あるいは  $T^{\frac{1}{\gamma-1}}$

式 (2.13) からそれぞれ、

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.16)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (2.17)$$

が成り立つ。式 (2.14) を式 (2.16) に代入すると、

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.18)$$

式 (2.14) を式 (2.17) に代入すると、

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.19)$$

$p_0$  や  $\rho_0$  は、流れを等エントロピー的に速度を 0 にしたときに得られる圧力や密度である。断熱流れでもエントロピーが一定でない流れでは局所的に  $p_0$  や  $\rho_0$  が定義される。しかし、これらの値は、エントロピーが摩擦や衝撃波により変化するので、流れに沿って変化する

可能性がある。

臨界状態での圧力，密度，温度をそれぞれ， $p^*$ ， $\rho^*$ ， $T^*$ とすれば，よどみ状態での圧力，密度，温度  $p_0$ ， $\rho_0$ ， $T_0$  との関係は式 (2.14)，式 (2.18)，及び式 (2.19) で  $M=1$  とおくと， $\gamma=1.4$  のとき

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} = 0.833 \quad (2.20)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.528 \quad (2.21)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.634 \quad (2.22)$$

式 (2.21) より，例えば空気( $\gamma=1.4$ )が等エントロピー的に膨張するとき，圧力が全圧の 52.8[%]まで減少したところで，マッハ数  $M=1$  となる。また，管内の等エントロピー流れの臨界状態 ( $M=1$ ) における断面積  $A^*$  と，任意のマッハ数  $M$  における断面積  $A$  との関係は以下の式で表される。

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{(\gamma-1)M^2 + 2}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2.23)$$

### 2.3 垂直衝撃波

断面積一定の定常な断熱流れを考える．垂直衝撃波直前のマッハ数を  $M_1$ ，静圧を  $p_1$ ，静温度を  $T_1$ ，全温度を  $T_{01}$ ，密度を  $\rho_1$ ，流速を  $u_1$ ，音速を  $a_1$  とし，垂直波直後のマッハ数を  $M_2$ ，静圧を  $p_2$ ，静温度を  $T_2$ ，全温度を  $T_{02}$ ，密度を  $\rho_2$ ，流速を  $u_2$ ，音速を  $a_2$  とする．衝撃波による変化は断熱変化であるから，その前後の全温度は一定に保たれ， $T_{01} = T_{02}$  である．したがって(2.14)より，次式が得られる．

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma - 1)M_2^2 + 2} \quad (2.24)$$

状態方程式と連続の式より，

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{M_2}{M_1} \frac{a_2}{a_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

上式に式(2.24)を代入すると，

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_2}{M_1} \left[ \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma - 1)M_2^2 + 2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

となる．また，

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (2.27)$$

式(2.26)および式(2.27)をより  $p_2/p_1$  を消去して， $M_2$  について解くと以下の二つの解が得られる．

$$M_1 = M_2 \quad (2.28)$$

$$M_2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (2.29)$$

式(2.28)の場合，式(2.24)より  $T_2 = T_1$  となり，状態方程式，連続の式より  $p_2 = p_1$  となる．これは成り立たない解であるため，衝撃波下流  $s$  のマッハ数  $M_2$  は式(2.29)で与えられる．

式(2.29)を式(2.24)と式(2.27)に代入すると以下のようなになる．

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} = \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 \quad (2.30)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (2.31)$$

また密度比は，

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} = \frac{u_1}{u_3} \quad (2.32)$$

となる．



### 第3章 過膨張流れ

2章では、ラバルノズルの流れ場に関する一般的な理論について述べたが、過膨張状態における実際の流れ場は、衝撃波と境界層が干渉することで斜め衝撃波が発生する。さらに、衝撃波と境界層が干渉することで、はく離を伴う複雑な流れ場となることが従来の研究[8,9,10,11]から明らかとなっている。本章では、過膨張流れに関する従来の理論とそれぞれの理論曲線を導出する手法について説明する。

#### 3.1 斜め衝撃波

ラバルノズルや超音速ディフューザなど、超音速内部流れにおいて形成される衝撃波のほとんどは垂直衝撃波である。しかし厳密に言えば、垂直衝撃波は壁面境界層と干渉し、波面には流線に対し垂直でない部分が生じる。一般に、波面が流線に対して垂直でない衝撃波を、斜め衝撃波という。

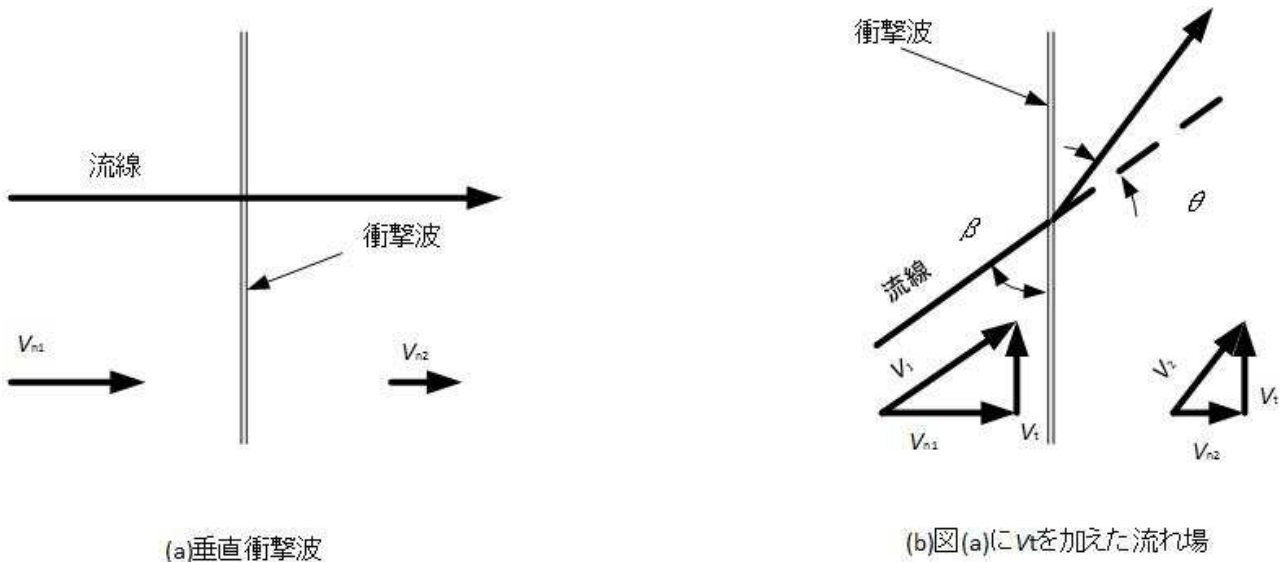


図 3.1 垂直衝撃波と斜め衝撃波の関係

垂直衝撃波と斜め衝撃波の関係を図 3.1 に示す。斜め衝撃波前後の流れの関係は、垂直衝撃波を用いて、つぎのように導かれる。図 3.1 (a)に示すように、静止した観測者から見た垂直衝撃波上流と下流の速度を、それぞれ $V_{n1}$ 、 $V_{n2}$ 、右斜め上から左斜め下へ一定の速度 $V_t$ で観測者が動くと速度場に左斜め下から右斜め上に向かう速度 $V_t$ のベクトル的に加算される。図 3.1 (b)に示すように、 $V_{n1}$ と $V_t$ および $V_{n2}$ と $V_t$ の合成速度をそれぞれ $V_1$ と $V_2$ とする。図より波面が上流の流線となす角を衝撃波角 $\beta$ 、流線は斜め衝撃波を通過すると、波面に近づくように曲げられる。その角 $\theta$ を流れの転向角という。転向角 $\theta$ は反時計回りを正、時計回りを負とする。

図 3.2 (b)では $\theta > 0$  で、このような衝撃波は、上流から下流に向かって立つ観測者から見て左向き斜め衝撃波と言い、右側に向かう衝撃波を右向き斜め衝撃波という。本紙では、左向き斜め衝撃波を取り扱うこととし、轉向角 $\theta$  は正とする。

図 3.2(a)に示すように、図の幾何学的関係より

$$V_{n1} = V_1 \sin \beta, \quad V_{n2} = V_2 \sin(\beta - \theta) \quad (3.1)$$

$$V_t = V_1 \cos \beta = V_2 \cos(\beta - \theta) \quad (3.2)$$

$$V_{n1}/V_t = \tan \beta, \quad V_{n2}/V_t = \tan(\beta - \theta) \quad (3.3)$$

衝撃波上流と下流の音速を、それぞれ $a_1, a_2$  とすれば、上流マッハ数は $M_1 = V_1/a_1$ 、下流マッハ数は $M_2 = V_2/a_2$  であるから、式 (3.1) より

$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1}{a_1} \sin \beta = M_1 \sin \beta \quad (3.4)$$

$$M_{n2} = \frac{V_{n2}}{a_2} \sin(\beta - \theta) = M_2 \sin(\beta - \theta) \quad (3.5)$$

図 3.2(b)の破線で示すように、斜め衝撃波を通る 2 本の流線に囲まれた検査体積 ABCD を考え、式 (2.2) より

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \quad (3.6)$$

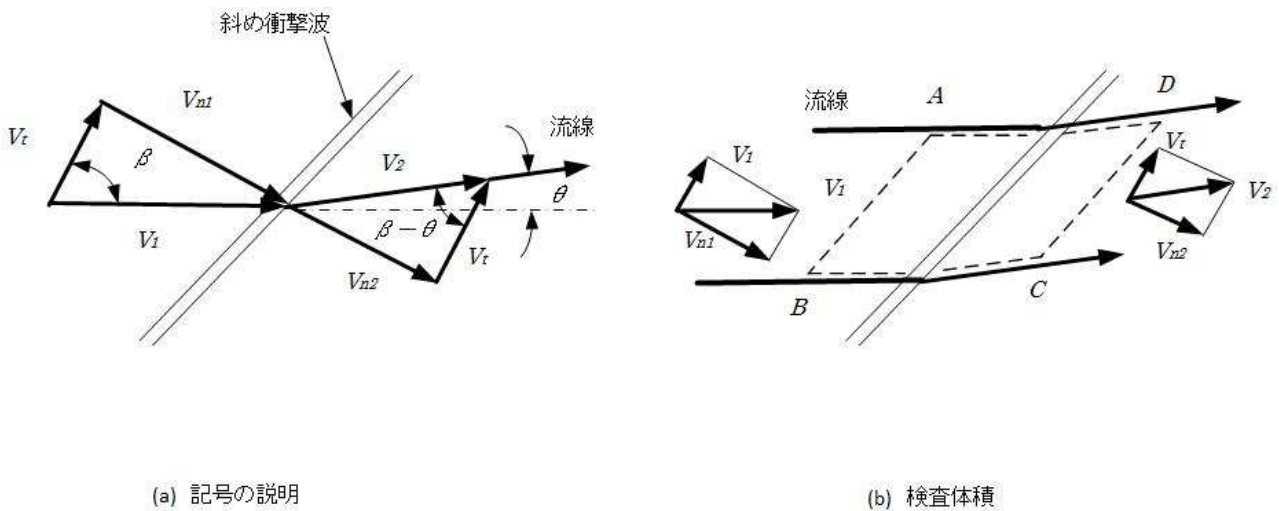


図 3.2 斜め衝撃波の記号と検査体積

垂直衝撃波前後の関係式 (2.29), (2.31), (2.32) において、式 (2.29) の $M_1$  を $M_1 \sin \beta$ 、 $M_2$  を式 (3.5) の $M_2 \sin(\beta - \theta)$  におきかえると、斜め衝撃波に対して、つぎの諸式が得られる。

$$M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} \quad (3.7)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (3.8)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} \quad (3.9)$$

式 (3.3) の二つの式より  $V_t$  を消去し、式 (3.6) を用いると

$$\frac{V_{n1}}{V_{n2}} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (3.10)$$

式 (3.9) と式 (3.10) より

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (3.11)$$

上式を変形し  $M_1$  について解くと

$$\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (3.12)$$

上式をさらに変形して

$$M_1 = \sqrt{\frac{-2(\tan \theta + \cot \beta)}{(\gamma + \cos 2\beta) \tan \theta - 2 \cot \beta \sin^2 \beta}} \quad (3.13)$$

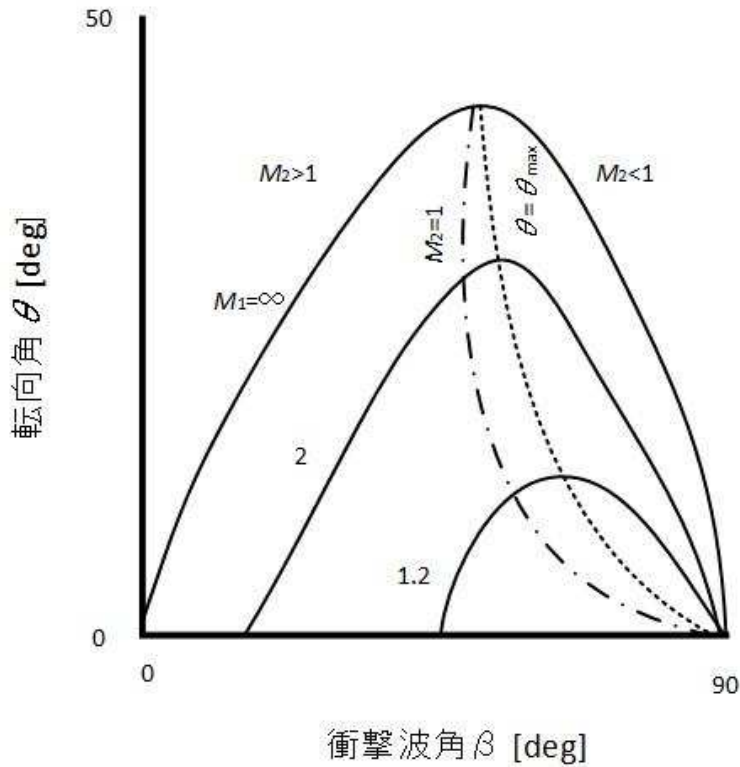


図 3.3 衝撃波角と轉向角の関係

図 3.3 に、衝撃波角と転向角の関係を衝撃波上流のマッハ数の違いで示した図を示す。式 (3.12) において、比熱比  $\gamma = 1.4$  である。図から明らかなように、 $M_1$  を一定として  $\beta$  を変化させると、式 (3.12) を満足する転向角  $\theta$  には最大値が存在する。この角  $\theta_{\max}$  を、最大転向角という。図 3.3 の破線は最大転向角の点で結んだ線である。一転鎖線は  $M_2 = 1$  となる点を結んだ線で、これより左側では  $M_2 > 1$ 、右側では  $M_2 < 1$  である。

二つの斜め衝撃波が互いに交差するときに生じる交差は正常交差とマッハ交差がある。図 3.4 に正常交差とマッハ交差を示す。衝撃波前に向く流線方向が衝撃波後に向く流線方向との角度差である転向角あるいは偏角  $\theta$  である。図 3.4 (a) は偏角  $\theta$  が小さく衝撃波が互いに突き抜けあう場合を示し、このような交差を正常交差という。ここで、斜め衝撃波がまっすぐに面に入射し、反射される場合で、衝撃波が出ているところから反射を行い始める場所の面までの衝撃波を入射衝撃波と言い、反射し始めている面の場所から衝撃波が途切れるまでを反射衝撃波という。図 3.4 (b) は偏角  $\theta$  が正常交差しているときに比べ大きく、衝撃波の交差により三重点が生じる場合で、このような交差をマッハ交差という。

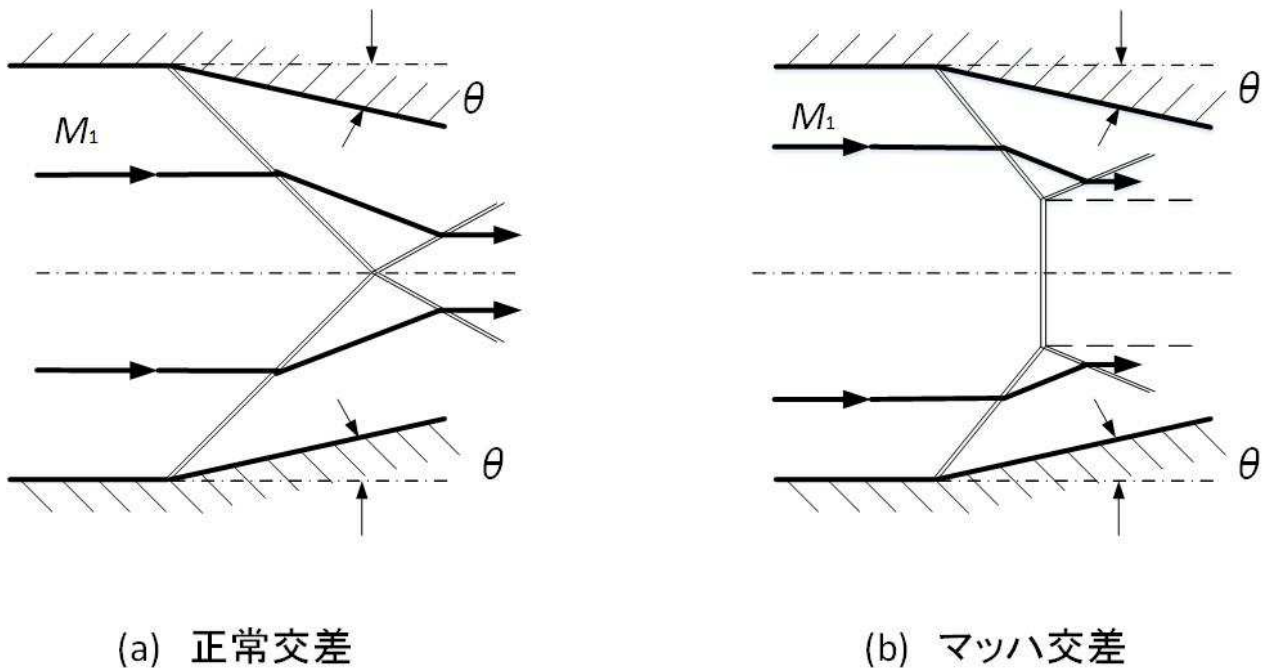


図 3.4 正常交差とマッハ交差

式 (3.8) と式 (3.12) より

$$\tan \theta = \frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{1 + \gamma M_1^2 - \frac{p_2}{p_1}} \sqrt{\frac{\frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} - \frac{p_2}{p_1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}} \quad (3.14)$$

上式は左斜めに対する式で、右向き衝撃波の場合には負号をつければよい。上式において  $\gamma$  と  $M_1$  の値を与えると、圧力比  $p_2/p_1$  と転向角  $\theta$  の関係が得られる。

図 3.1 の衝撃波角と転向角の関係より、ある上流マッハ数  $M_1$  と転向角  $\theta$  を与えると、 $\theta < \theta_{\max}$  であれば、式 (3.12) を満足する  $\beta$  の値は二つ存在し、 $\theta = \theta_{\max}$  のときは一つで、 $\theta > \theta_{\max}$  では  $\beta$  の解は存在しない。一般に、 $\theta < \theta_{\max}$  の場合の二つの解のうち、 $\beta$  が大きい方の衝撃波（図 3.1 の破線より右側の部分）を、強い斜め衝撃波、小さい方の衝撃波を、弱い斜め衝撃波という。すべての  $M_1$  と  $\theta$  の値に対して、強い斜め衝撃波の下流は亜音速、弱い斜め衝撃波の場合はほぼ下流は超音速である。

実際の流れにおいて、与えられた  $M_1$  と  $\theta$  に対して、強い斜め衝撃波と弱い斜め衝撃波のいずれが起こるかは、衝撃波上流と下流の圧力条件に依存する。

強い斜め衝撃波の極限は垂直衝撃波、弱い斜め衝撃波の極限はマッハ波であり、これらの波による転向角はいずれもゼロである。背圧が十分に低い場合には、弱い斜め衝撃波が発生し、超音速になる。一方、背圧が高い場合には、強い斜め衝撃波が生じ、亜音速になる。

### 3.2 衝撃波と境界層の干渉に関する理論

Romine<sup>[12]</sup>は、ノズル壁面近傍で発生した斜め衝撃波が境界層をはく離させ、その後ノズル内部から安定した噴流を形成するとき、はく離によって境界層内の静圧が背圧まで回復し、壁面近傍の流れは流れ方向に対して平行に傾けられるとして、はく離モデルを作成した。

図 3.5 に斜め衝撃波によるはく離点周辺の流れについて示す。このときの考慮すべき境界条件は、衝撃波はく離後の静圧が大気状態の圧力と等しい状態であること、そして壁面近傍の流線が衝撃波はく離によって平行軸方向に曲げられることである。このとき、静圧の大気圧への回復と同時に流れを壁面からはく離させ、流れを軸に対して平行にする特殊な曲がり衝撃波が形成される。ある地点のノズル壁面の半角 $\theta_N$ 、それから衝撃波上流のマッハ数 $M_1$ 、衝撃波前の壁面静圧 $p_1$ を用いると、斜め衝撃波のはく離によって適正膨張噴流となる場合の式は以下の式で表すことができる。また、本研究では、 $p_2 = p_b = p_{amb}$  とする。

$$\frac{p_b}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad (3.15)$$

$$\frac{p_b}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (3.16)$$

$$\frac{p_{os}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.17)$$

ここで、転向角と衝撃波角の関係は、式(3.11)を展開することで得られる、 $\sin^2 \beta$ の三次方程式を解くことによって得られる。閉形式(3.11)を解くと、強い斜め衝撃波と弱い斜め衝撃波についての衝撃波角と転向角の関係式が得られる。なお、式(3.11)の解法についての詳細は参考文献<sup>[12]</sup>に記載している。

強い斜め衝撃波における衝撃波角の式は

$$\sin^2 \beta = \frac{k}{3} + 2\sqrt{-\frac{\eta}{3}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[ \frac{-\zeta}{2\sqrt{(-\eta/3)^3}} \right] \right\} \quad (3.18)$$

弱い斜め衝撃波における衝撃波角の式は

$$\sin^2 \beta = \frac{k}{3} - 2\sqrt{-\frac{\eta}{3}} \cos \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[ \frac{-\zeta}{2\sqrt{(-\eta/3)^3}} \right] \right\} \quad (3.19)$$

ここで、それぞれの式の値を $k$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$  とする。

$$k = \frac{M_1^2 + 2}{M_1^2} + \gamma \sin^2 \theta \quad (3.20)$$

$$\eta = \frac{2M_1^2 + 1}{M_1^4} + \sin^2 \left[ \theta \left\{ \frac{(\gamma + 1)^2}{4} + \frac{\gamma - 1}{M_1^2} \right\} \right] - \frac{k^2}{3} \quad (3.21)$$

$$\zeta = \frac{k}{3} \left\langle \frac{2M_1^2 + 1}{M_1^4} + \sin^2 \left[ \theta \left\{ \frac{(\gamma + 1)^2}{4} + \frac{\gamma - 1}{M_1^2} \right\} \right] \right\rangle - \frac{\cos^2 \theta}{M_1^4} - \frac{2k^3}{27} \quad (3.22)$$

ここで、転向角 $\theta$ は、ノズル壁面の半角 $\theta_N$  と  $\theta = \theta_N$  とする。

式 (2.18) と式 (3.7) より

$$\frac{p_{os}}{p_b} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}{\frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}} \quad (3.33)$$

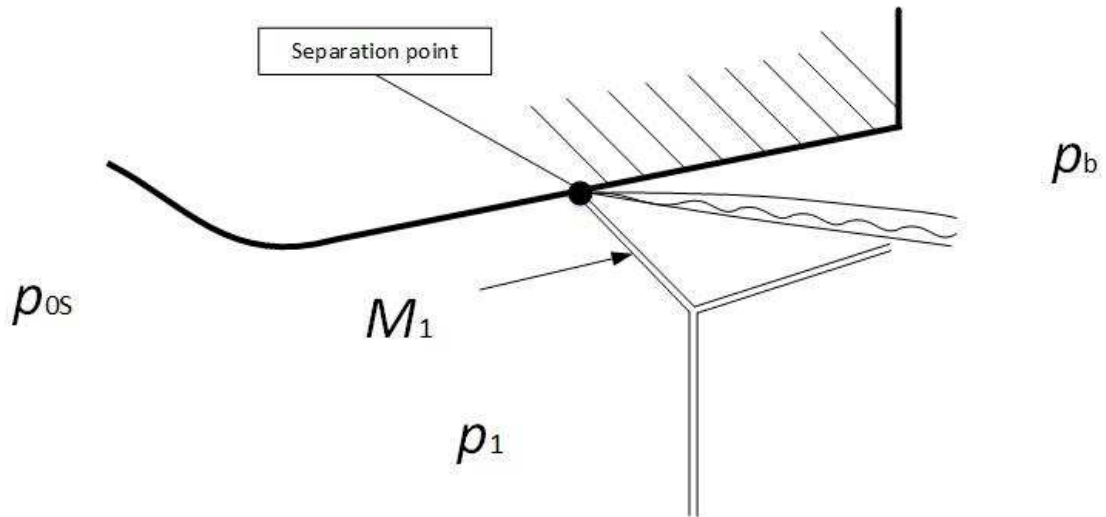
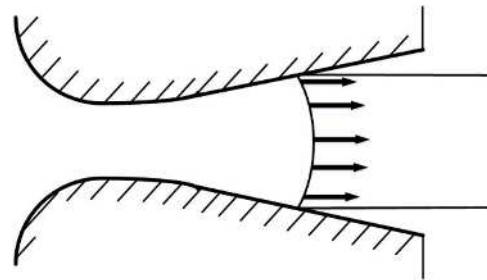
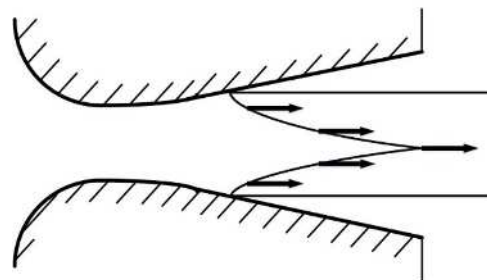


図 3.5 斜め衝撃波によるはく離モデル



強い衝撃波



弱い衝撃波

図 3.6 ノズル内部の衝撃波によるはく離

Arens, Spiegler<sup>[8,9]</sup>は、衝撃波による乱流境界層のはく離点で発生する圧力上昇が、境界層内の特性速度がよどむことによって発生するとして、 $u_1^*$ の点とはく離点を結ぶ1つの流線に沿ったエネルギー式を考えた。

図 3.7 に干渉開始点とはく離点における流れモデルを示す。

境界層内の全温度が一定と仮定すると、境界層内の特性マッハ数は次式で与えられる。

$$M_1^* = \left\{ \frac{M_1 \left( \frac{u_1^*}{u_1} \right)}{\left\{ 1 + \left[ \frac{\gamma - 1}{2} \right] M_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{u_1^*}{u_1} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}} \right\} \quad (3.34)$$

$M_s^* < 1$  のとき、はく離は等エントロピー的なよどみによって発生する。このときのはく離圧力比は

$$\frac{p_s}{p_1} = \left\{ \frac{1 + \left[ \frac{\gamma - 1}{2} \right] M_1^2}{1 + \left[ \frac{\gamma - 1}{2} \right] M_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{u_1^*}{u_1} \right)^2 \right]} \right\}^{(\gamma/\gamma-1)} \quad (3.35)$$

$M_s^* > 1$  のとき、はく離は、垂直衝撃波によって圧縮された後、等エントロピー的なよどみによって発生する。このときのはく離圧力比は

$$\frac{p_s}{p_1} = \frac{\left[ \gamma + \frac{1}{2} M_1^2 \left( \frac{u_1^*}{u_1} \right)^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)}}{\left\{ 1 + \left[ \frac{\gamma - 1}{2} \right] M_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{u_1^*}{u_1} \right)^2 \right] \right\} \left\{ M_1^2 / 2 \left[ \left( \gamma + 1 \right) \left( \frac{u_1^*}{u_1} \right)^2 - \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma + 1} \right] - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right\}^{1/(\gamma-1)}} \quad (3.36)$$

上式の  $M_s$  と  $u_s$  は干渉開始点の主流におけるマッハ数と速度、 $\gamma$  は気体の比熱比である。また、上式における  $u_1^*/u_1$  は実験的に定められるため、本研究では文献<sup>[8,9]</sup>を参考に  $u_1^*/u_1=0.60$  とした。

式(3.35)及び式(3.36)は、 $M_1 \geq 1.5$  以上の境界層はく離を精度よく予測できることが松尾ら<sup>[11]</sup>によって報告されている。しかし、本理論をスロート直径が数 mm オーダーの微小ノズルに対して適用した例はこれまで報告されていない。



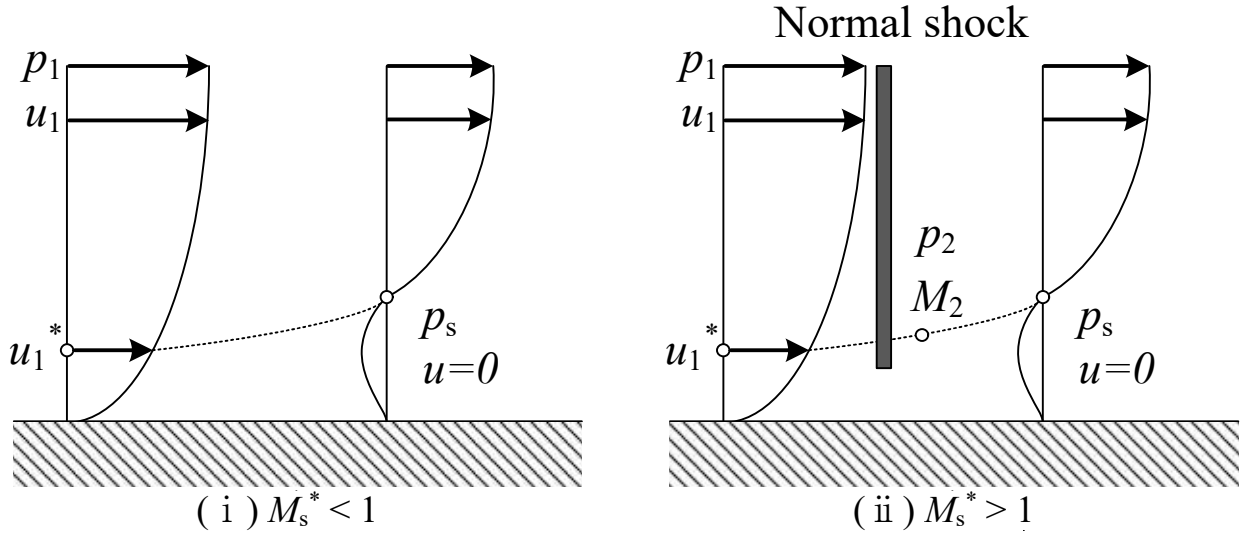


図 3.7 衝撃波と境界層の干渉によるはく離モデル

### 3.3 ノズル内の衝撃波分布

2.1 節では、ラバルノズル内で垂直衝撃波が発生する流れ場を仮定したが、過膨張流れでは、ノズル内で発生した壁面に沿って境界層が形成され、衝撃波と境界層は互いに干渉を起こす。このとき、ノズル内で発生する衝撃波は、干渉の影響によって斜め衝撃波となったり、はく離を起こしたりする。そこで、本研究では、実験によって得られた各背圧比の衝撃波形成位置を先述した理論曲線と比較することで衝撃波流れの分析を行う。今回用いた理論曲線はそれぞれ垂直衝撃波、衝撃波による乱流境界層のはく離、斜め衝撃波によるはく離を表したものである。

はじめに、ランキン・ユゴニオの式に基づいた、垂直衝撃波の形成位置の作成方法について述べる。

スロート下流の損失を伴う流れに対して、ノズル出口の静圧  $p_e$  とその断面のマッハ数  $M_e$  に対して、以下の式が成立する。なお、ノズル出口の静圧  $p_e$  は背圧  $p_b$  と等しい。

$$\frac{p_{os}}{p_e} \frac{A_1}{A_e^*} = \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} M_e \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2} \quad (3.37)$$

式(3.37)を  $M_e$  について展開すると  $M_e^2$  についての以下の方程式が得られる。

$$\frac{(\gamma-1)}{2} M_e^4 + M_e^2 - \left[ \frac{p_{os}}{p_e} \frac{A^*}{A_e} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \right]^2 = 0 \quad (3.38)$$

式(3.38)を解の公式を用いて解くと、

$$M_e^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2(\gamma - 1) \left[ \frac{p_{os}}{p_e} \frac{A_1^*}{A_e} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \right]^2}}{\gamma - 1} \quad (3.39)$$

次に、式(2.18)を変形すると、スロート下流で全圧損失後の全圧  $p_{oe}$  は  $p_e$  と  $M_e$  を用いて、以下の式で与えられる。

$$p_{oe} = p_e \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.40)$$

ここで、損失後の全圧  $p_{oe}$  に対応する第2スロートを  $A_2^*$  とすると、式(2.2)から次式が得られる。

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{p_{os}}{p_{oe}} \quad (3.41)$$

さらに、衝撃波下流の等エントロピー流れに対して、以下の式が成り立つ。

$$\frac{A}{A_1^*} = \frac{A_2^*}{A_1^*} \frac{\left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}{\left[ \left( \frac{p}{p_{os}} \frac{p_{os}}{p_{oe}} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left( \frac{p}{p_{os}} \frac{p_{os}}{p_{oe}} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.42)$$

上式を用いて、 $\frac{A_2^*}{A_1^*} \leq \frac{A}{A_1^*} \leq \frac{A_e}{A_1^*}$  を定めると、第2スロートからノズル出口までの等エントロピー圧縮による圧力線図を得ることができる。

ここで、ノズル内部に垂直衝撃波が定在する場合、衝撃波直前のマッハ数  $M_1$  のとり得る値は、 $1.0 \leq M_1 \leq 1.67$  であることを考慮し、この範囲に対して以下の式を用いる。

なお、 $M_1 = 1.67$  は本実験で用いた二次元ベンチュリノズルの設計マッハ数である。

$$\frac{p_{os}}{p_{oe}} = \left[ \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[ \frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (3.43)$$

$$\frac{A_1}{A_1^*} = \frac{1}{M_1} \left[ \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (3.44)$$

式(3.43)と式(3.44)から、衝撃波直前のマッハ数  $M_1$  との関数として、 $p_{os}/p_{oe}$  と  $A_1/A_1^*$  の関係が得られる。よって、式(3.41)の  $p_{os}/p_{oe}$  に一致する値を式(3.43)から陰的に求めることで、衝撃波直前のマッハ数  $M_1$  が得られ、式(3.44)によって  $A_1/A_1^*$  が定まる。

つぎに, Arens ら<sup>[8,9]</sup>による境界層はく離, Romine ら<sup>[12]</sup>による境界層はく離を示す理論曲線の作成方法について述べる.

式(2.23)より, ノズル内の等エントロピー流れの臨界状態( $M=1$ )における断面積  $A^*$  と, 衝撃波直前のマッハ数  $M_1$  における断面積  $A_1$  との関係は, 以下の式で表される.

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{M_1} \left[ \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.45)$$

ここで,  $p_s=p_b$  であることを考慮すれば, ノズル上流のよどみ圧力  $p_{os}$  と背圧  $p_b$  の比  $p_b/p_{os}$  について以下の関係が成り立つ.

$$\frac{p_b}{p_{os}} = \frac{p_s}{p_1} \frac{p_1}{p_{os}} \quad (3.46)$$

よって, 式(3.36)と式(2.18)を式(3.46)に代入すれば, Arens らの理論<sup>[8,9]</sup>に基づくはく離マッハ数  $M_1$  と背圧比  $p_b/p_{os}$  との関係は以下の式で表される.

$$\frac{p_b}{p_{os}} = \frac{\left( \frac{u_1^*}{u_1} \right)^{\left( \frac{2\gamma}{\gamma-1} \right)}}{\left\{ 1 + \left[ (\gamma-1)/2 \right] M_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{u_1^*}{u_1} \right)^2 \right] \right\} \left\{ M_1^2 / 2 \left[ (\gamma+1) \left( \frac{u_1^*}{u_1} \right)^2 - (\gamma-1)^2 / (\gamma+1) \right] - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right\}^{1/(\gamma-1)}} \quad (3.47)$$

なお上記の式の適用範囲は  $M_1 \geq 1.13$  であり,  $M_1 \leq 1.13$  については垂直衝撃波による圧縮の後, 等エントロピー的に膨張するため,  $M_1 \leq 1.13$  での理論曲線の作成方法は上述の垂直衝撃波と同様である.

また,  $p_2=p_b$  であることを考慮すれば背圧比  $p_b/p_{os}$  について以下の関係が成り立つ.

$$\frac{p_b}{p_{os}} = \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{os}} \quad (3.48)$$

よって, 式(3.16)と式(2.18)を式(3.48)に代入すれば, ノズル内部に斜め衝撃波が発生し, はく離するときの背圧比  $p_b/p_{os}$  は以下の式で表される.

$$\frac{p_b}{p_{os}} = \left( \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma-1)}{\gamma+1} \right) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\left( \frac{-\gamma}{\gamma-1} \right)} \quad (3.49)$$

上述の関係式によって衝撃波直前のマッハ数  $M_1$  の関数である式(3.43), 式(3.47), 式(3.49)が得られる.

つまり, Arens らの理論式に基づくはく離が発生するときの背圧比と衝撃波位置の関係は, 式(3.45)と式(3.47)を, 斜め衝撃波によるはく離が発生するときの背圧比と衝撃波位置の関係は, 式(3.45)と式(3.49)を用いることで, ノズル内の衝撃波分布に関する理論曲線を得ることができる.

## 第4章 光学的可視化に関する研究

本研究では、二次元ベンチュリノズルを通る低レイノルズ数過膨張流れについて光学的可視化を用いて実験的に調査する。そこで、光学的可視化に関する従来の研究について述べる。

はじめに、光の物理現象の基本について述べる。真空中の光の速度を $c_0$ 、任意の気体の真空に対する屈折率（絶対屈折率あるいは単に屈折率）を $n$ とすれば、その気体中の光の速度 $c$ は次式で表される

$$c = c_0/n \quad (4.1)$$

また、屈折率 $n$ と密度 $\rho$ との間には、次の実験式が十分よい精度で成立する。

$$n = 1 + K\rho \quad (4.2)$$

ここで、 $K$ はグラッドストーン・デイル定数と呼ばれ、空気の場合 $K = 2.26 \times 10^{-4}$  [m<sup>3</sup>/kg]である。したがって、光は以下に示すような性質を持つ。

- (1) 密度の異なる領域を通過する光の速度は異なる。
- (2) 密度変化のある領域を通過する光は、プリズムを通る場合と同様に屈折する。

圧縮流れでは密度変化が存在するので、上記の光の性質を利用して流れを可視化することができる。代表的な手法として、(1)の性質を利用するのに干渉法、(2)の性質を利用するのに、シュリーレン法とシャドウグラフ法がある。これらの光学的可視化法は、流れを乱すことなく、流れの状態に関する情報が得られ、極めて有効である。本実験で用いた光学的可視化法の具体的な内容については次節以降で述べる。

### 4.1 シュリーレン法

図4.1に測定部の断面を示す。流れは $z$ 方向である。測定部に流れがない場合、光線は曲げられずスクリーン上の点Cに達する。測定部に流れがあり、密度が場所的に異なる場合には光は屈折するが、流れは二次元、すなわち $x$ 方向に密度は一様で、 $y$ 軸と $z$ 軸方向の密度分布は一様でないとする。したがって光は $x,y$ 平面と $x,z$ 平面上で曲げられる。図2.12において、 $x$ 軸と屈折した光線のなす角を $\epsilon_b$ 、点CとC'の距離は $\Delta h$ とおき、シュリーレン法は $\epsilon_b$ が異なることを利用するものである。

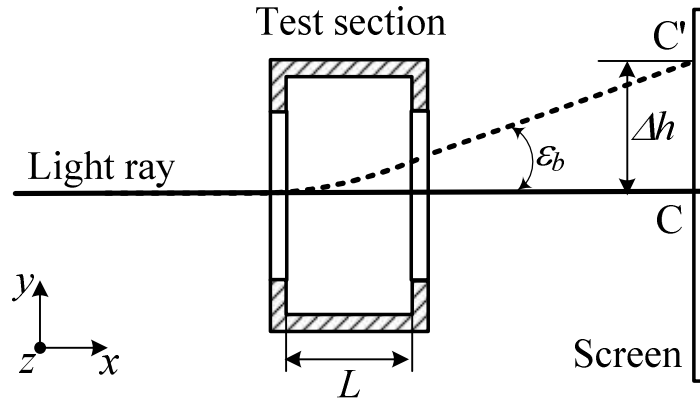


図 4.1 風洞内の試験領域を通過する光線の屈折

シュリーレン法の基本的配置を図 4.2 に示す．小さいが有限の大きさをもつ光源  $ab$  をレンズ  $L_1$  (焦点距離  $f_1$ ) の焦点距離に置く．測定部に流れがない場合，光源上の 1 点  $a$  からの光束  $aP_1P_2$  は平行光束となって測定部を通過し，レンズ  $L_2$  (焦点距離  $f_2$ ) によって  $a'$  に焦点を結ぶ．同様に光源上の他の点からの光束も，レンズ  $L_2$  の焦平面に焦点を結び，光源  $ab$  の像  $a'b'$  が得られる．光源が有限の大きさをもつため，測定部を通る個々の光線は厳密には平行ではないが，光源上の各点から出るそれぞれの光束は，レンズ  $L_1$  と  $L_2$  の間で平行である．また，測定部に流れがある場合の屈折した光線を破線で示す．

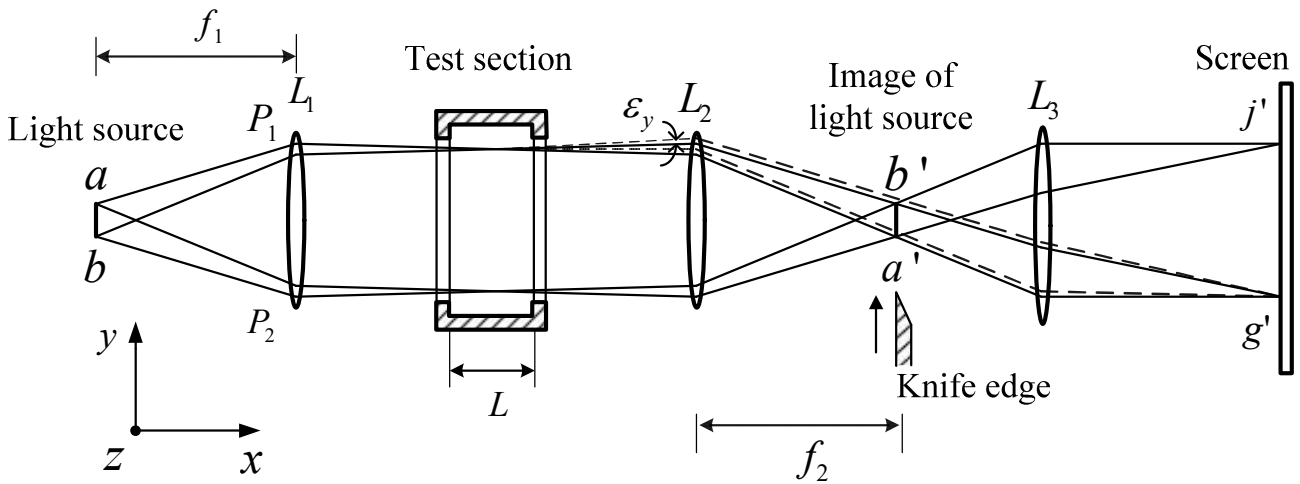


図 4.2 シュリーレン光学系の基本配置図

ここで，図 4.2 の点  $a'$  の下方に示す仕切り板 (ナイフエッジ(knife edge)) を矢印の方へ動かす，光束  $a'b'$  の一部分をさえぎると，全ての光束が一様に影響を受けるため，スクリーン上の像は一様に暗くなる．

図 4.3 に図 4.2 の光源像  $a'b'$  を  $x$  方向から見た図を示す. 幅  $h$ , 長さ  $l$  の長方形の光源像 ABCD の一部分をナイフエッジで覆うと, 図 4.2 のスクリーンには覆われていない部分  $h_1$  に比例する明るさ  $E$  の光が達する. 詳細は後述するが, 光源像の  $y$  方向の変位は  $\Delta h = f_2 \varepsilon_b$  であり, 光源像は  $A'B'C'D'$  に変位する.

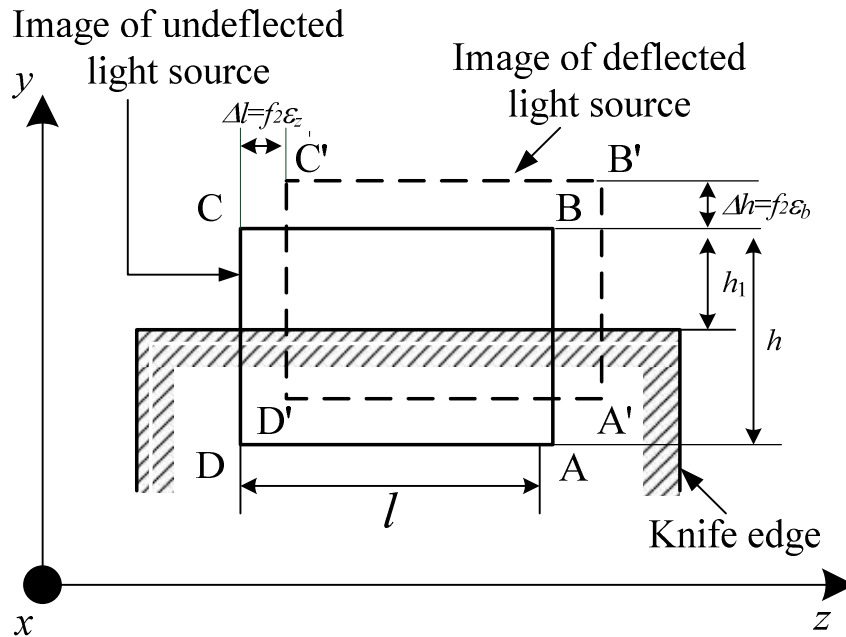


図 4.3 試験領域内の密度変化による光の屈折

ここで,  $x$  軸と屈折した光線のなす角  $\varepsilon_b$  は次式で示される.

$$\varepsilon_b = KL \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (4.3)$$

$\Delta E/E = \Delta h/h_1$  をコントラスト(contrast)と定義すれば, 式 (4.3) より,

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta h}{h_1} = \frac{f_2 \varepsilon_b}{h_1} = \frac{f_2 KL}{h_1} \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (4.4)$$

上式より, スクリーン上の像のコントラストは, ナイフエッジに垂直方向の流れの密度こう配に比例することがわかる. したがって, 流れ場の任意の方向の密度こう配は, ナイフエッジをその方向に垂直に設置することで得られるが, 普通は流れの方向に平行あるいは垂直に置く.

また、ナイフエッジの代わりに図 4.4 に示すような 3 色のカラーフィルター(tricolor filter)を置く。乱れのない光線が中央の緑色を通過するように設置すると、屈折した光線は赤色または青色を通過し、測定部の像がカラー画像として得られる。これをカラーシュリーレン法( Color schlieren method )という。カラーシュリーレン法は、ナイフエッジを用いたシュリーレン画像より流れの状態を判断しやすいという特徴がある。

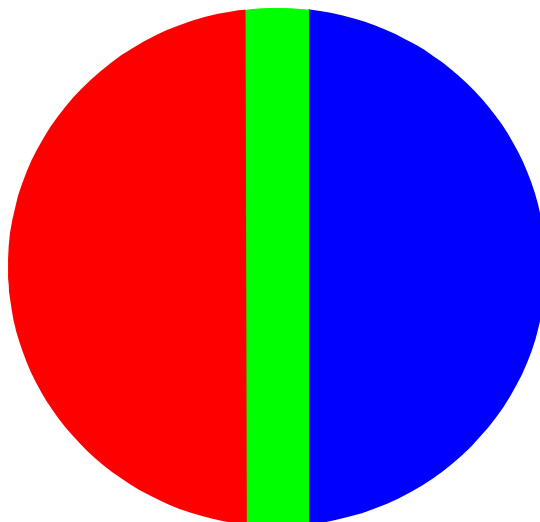


図 4.4 3 色カラーフィルター

半田ら<sup>[13]</sup>は、シュリーレン法と高速度カメラを組み合わせることで、図 4.5 に示す遷音速ディフューザ内に発生する衝撃波振動を測定することに成功している。彼らは、衝撃波発生位置におけるパワースペクトル密度分布(PSD)を高速度カメラにより撮影したシュリーレン写真(図 4.6)から算出し、図 4.7 に示すように、1次元オイラー方程式で計算した PSD と定量的に良く一致することを示した。また、図 4.8 に示すように、数値計算により得られた PSD を過去の実験値と比較することで、衝撃波振動が 2 つの全く異なるメカニズムで発生することを示した。1 つ目は境界層が乱流になる領域で圧力の乱れが発生し、衝撃波を強制的に振動させる場合で、この振動はディフューザ形状と衝撃波直前のマッハ数によって決定される。このとき、衝撃波の発生位置におけるパワースペクトル密度分布は幅方向に広がりをもった形状となる。2 つ目はディフューザ出口で乱れが反射し衝撃波を振動させる場合である。このとき、衝撃波の発生位置におけるパワースペクトル密度は先述の場合と比較して、より狭い範囲でピーク値をもった形状となる。

このように、超音速ノズル内で発生する衝撃波自体の振動を捉えることができるため、本研究では二次元ベンチュリノズル内の衝撃波振動について、本手法を用いて調査する。

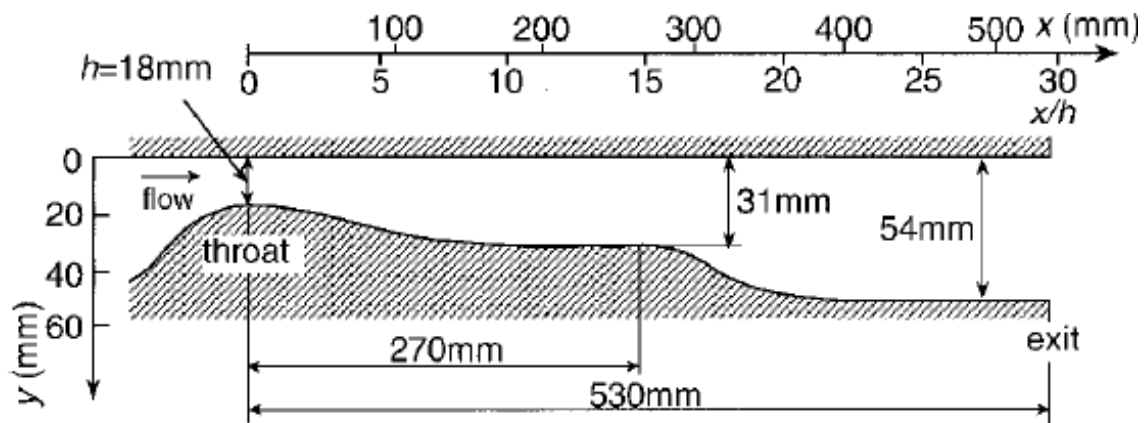


図 4.5 遷音速ディフューザの模式図

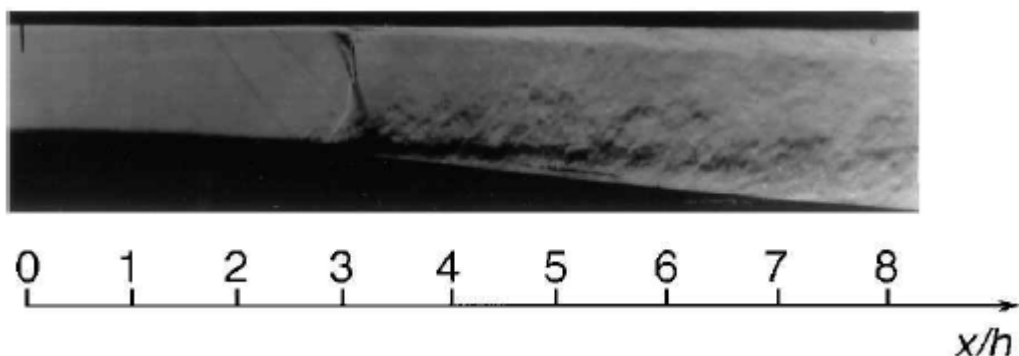


図 4.6 遷音速ディフューザ内のシュリーレン写真



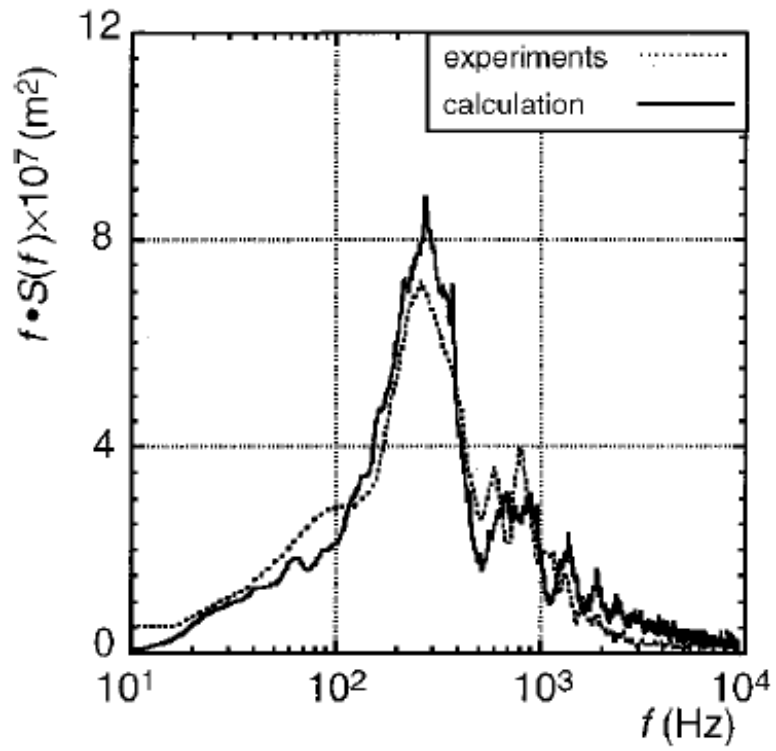


図 4.7 衝撃波位置におけるパワースペクトル密度分布

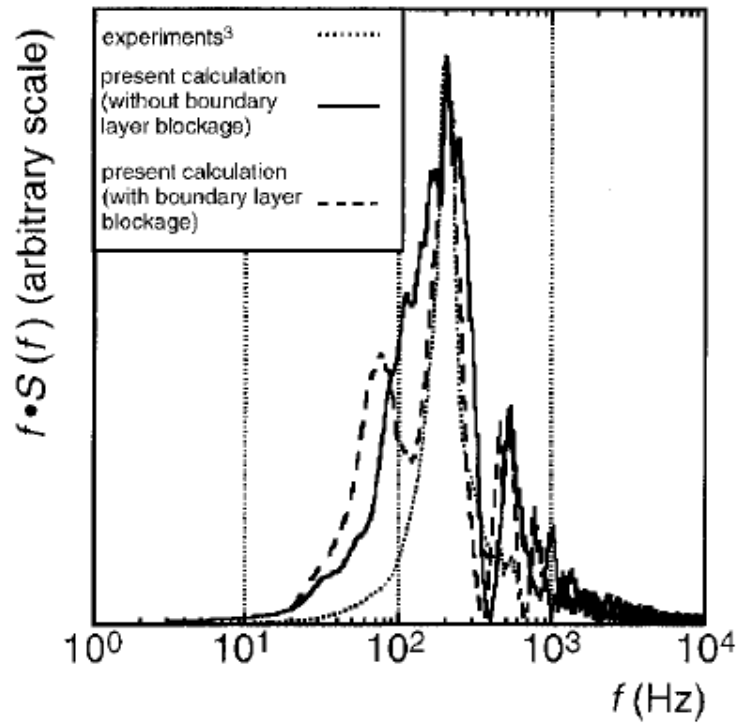


図 4.8 パワースペクトル密度分布の数値計算結果

## 4.2 レインボーシュリーレン法

前述したカラーシュリーレン法のカラーフィルターの代わりに色相が連続的に変化するレインボーフィルターを用いた測定法をレインボーシュリーレン法(Rainbow schlieren method)という。図 4.9 にレインボーフィルターを示す。レインボーシュリーレン法は、前節のシュリーレン法と比べ、より詳細に流れの状態を定性的に判断できる。

一般に光の特性は Red, Green 及び Blue の 3 原色の組み合わせで表示でき、特定の色を表示させるためには、Red, Green 及び Blue の各々の大きさを指定する。図 4.10 に示すようにこの表示法を RGB 表示法という。しかし、RGB 表示法では 3 つのパラメータから色が構成されるため解析が困難である。

レインボーシュリーレン法の場合、HSB 表示法が用いられる。HSB 表示法は図 4.11 に示すように、

*Hue* : 色相と呼ばれ、色そのものを表示する。

*Saturation* : 彩度と呼ばれ、色の鮮やかさを表示する。

*Brightness* : 明度と呼ばれ、色の明るさを表示する。

から成り、この表示法の特徴は、光の色そのものは Hue のみで決まることである。したがって、RGB 表示法と違い 1 つのパラメータで色が決まるため、解析が容易である。

レインボーシュリーレン法では HSB 表示法を用いることで、屈折した光線が投影する色そのもの（色相）と光線の変位  $\Delta h$  の関係が 1 対 1 に対応することができる。よって、色相成分を調べることで光線の変位  $\Delta h$  を簡単に算出することができる。

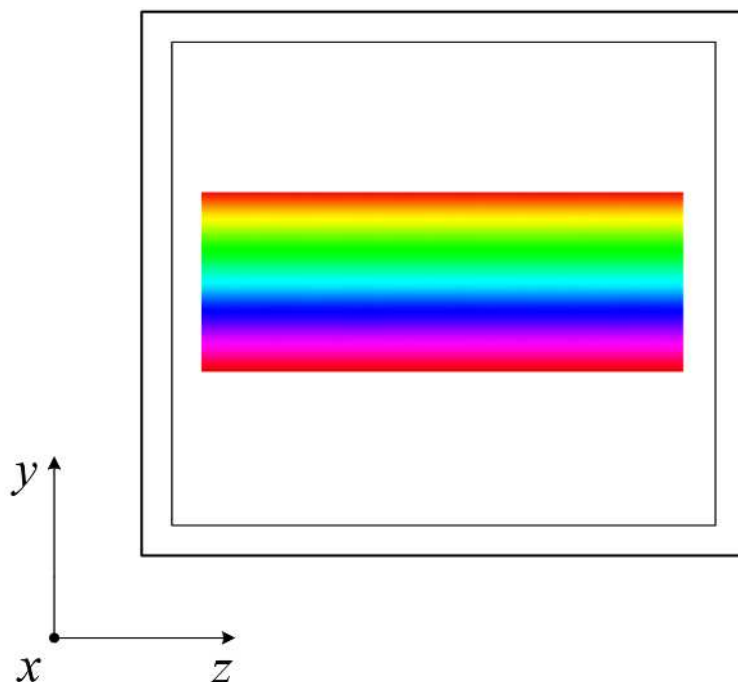


図 4.9 レインボーフィルター

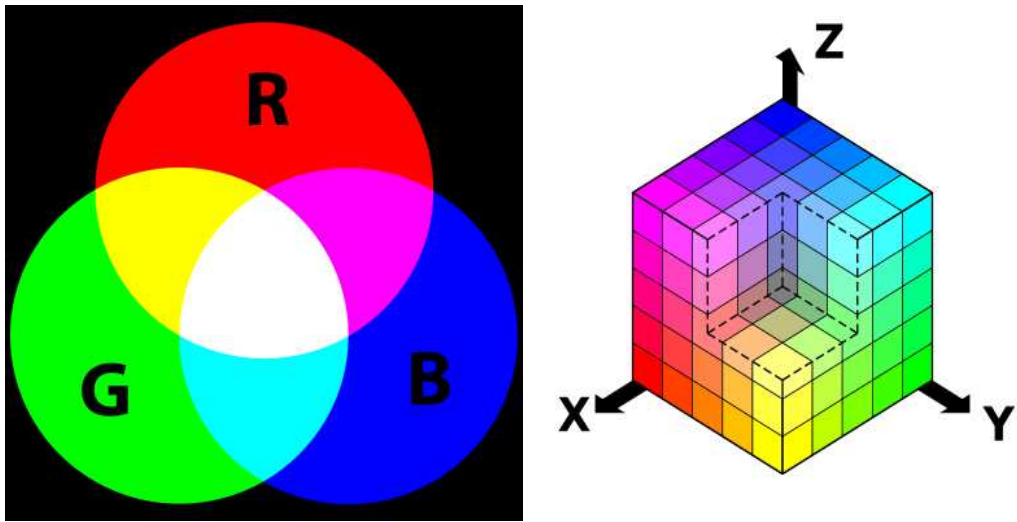


图 4.10 RGB 表示

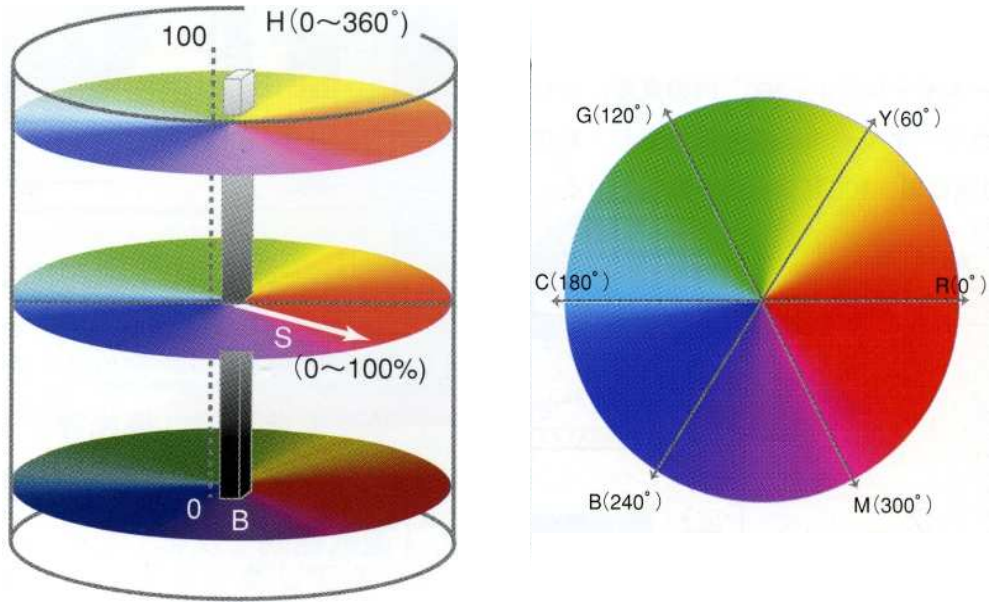


图 4.11 HGB 表示

レインボーシュリーレン法を用いて、噴流の流れ場を定性的かつ定量的に可視化したのは、Agrawal ら<sup>[14]</sup>である。レインボーシュリーレン写真を図 4.12 に示す。彼らは、図 4.13 に示すレインボーフィルターの大気状態における背景色相(Hue)が、異なる密度場を通過する際に光の屈折により変化する特性を利用し、図 4.12 のレインボーシュリーレン写真から、噴流における酸素のモル分率を測定した。(図 4.14)

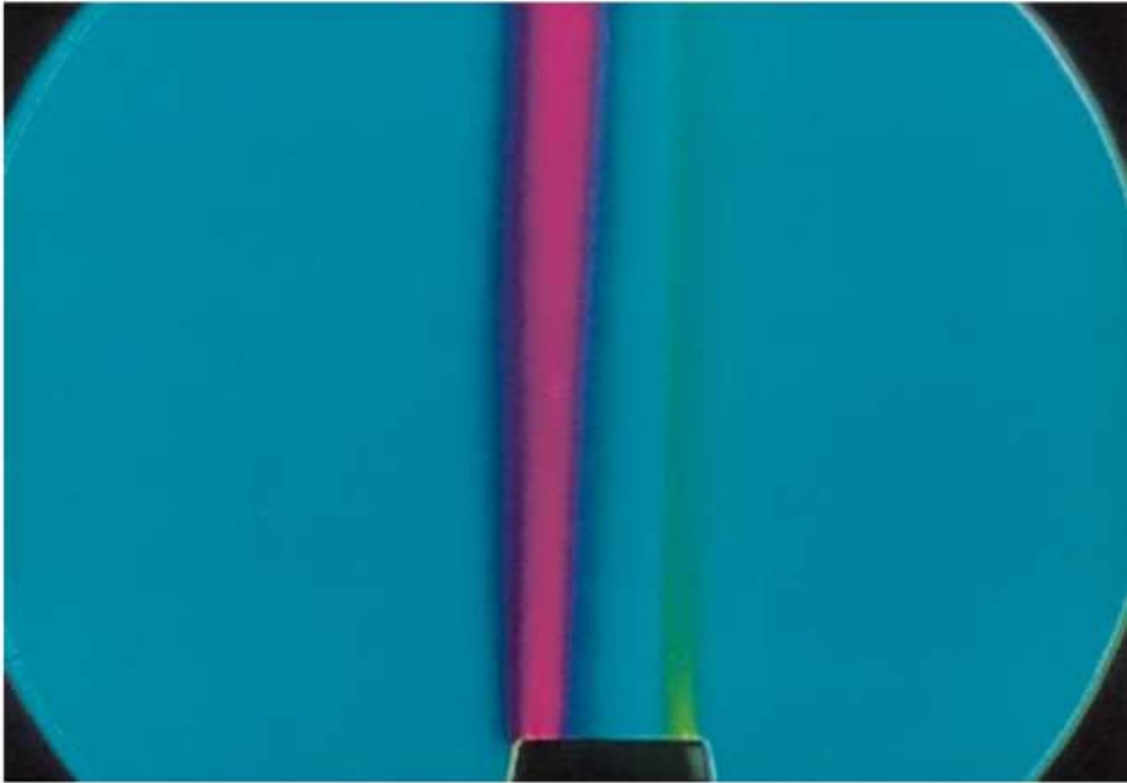


図 4.12 噴流のレインボーシュリーレン写真

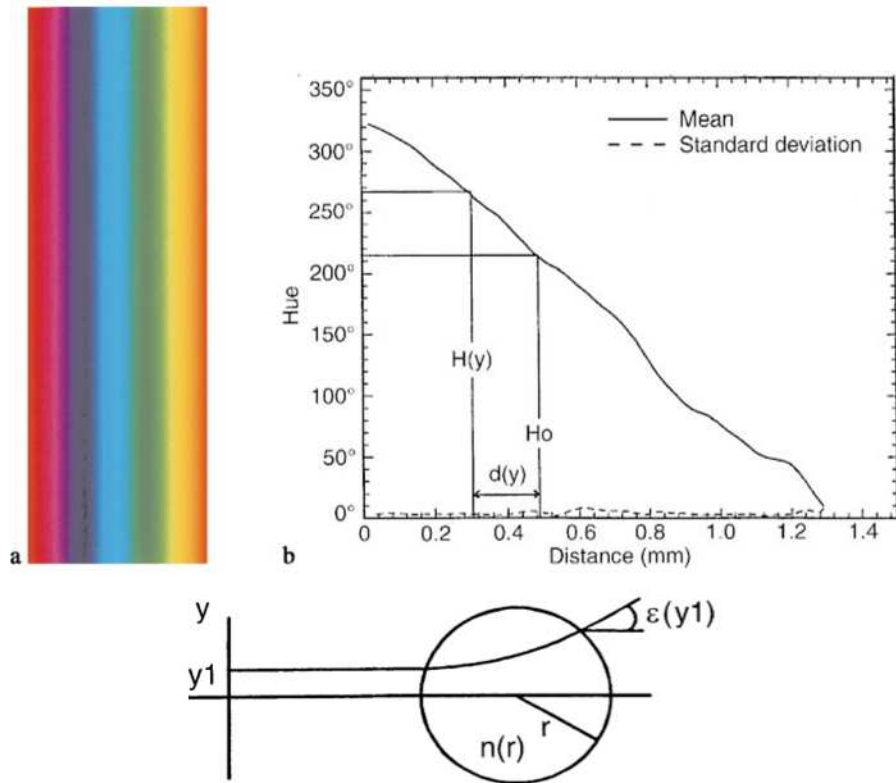


図 4.13 レインボーフィルター

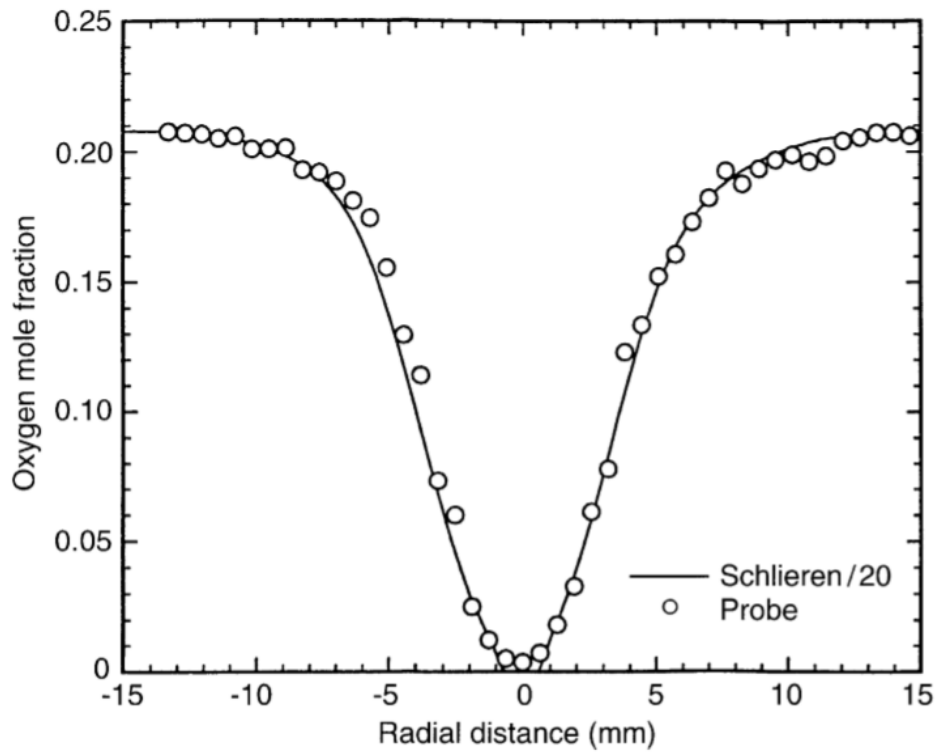


図 4.14 半径方向の酸素モル分率

山本ら<sup>[15]</sup>は、設計マッハ数 1.6 の軸対称ラバルノズルから発生する適正膨張噴流にレインボーシュリーレン法を適用している。彼らは、レインボーシュリーレン写真から測定した衝撃波を伴わない噴流の密度が、数値計算及びピトー管による測定値と定量的によく一致したことを示した。図 4.15 に半径方向の密度分布を示す。

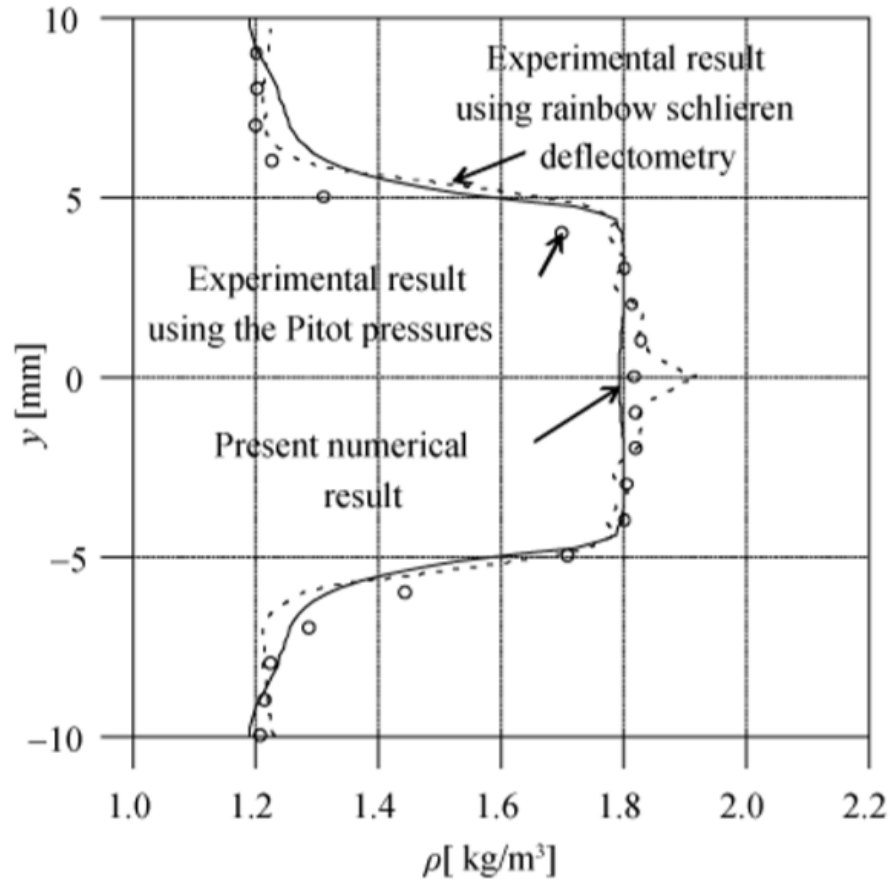


図 4.15 半径方向の密度分布

さらに高野ら<sup>[6]</sup>は、レインボーシュリーレン法に CT の原理を組み合わせたシュリーレン CT 法によって、噴流の 3 次元密度場の測定に成功している。彼らは、出口直径 10mm の軸対称先細ノズルから発生する、衝撃波を含む自由噴流の任意の断面における密度場の定量値について、レインボーシュリーレン写真を用いて測定し、図 4.16 に示すような、噴流の 3 次元密度場の定量化に成功した。また、得られた測定結果は、図 4.17 に示すように、従来のアーベル逆変換法による密度測定値と定量的によく一致することを示した。

このように、レインボーシュリーレン法による定量的な測定例については、これまで多くの研究者たちによって報告されている。しかし、こうした測定例はノズル出口からの噴流を測定対象としており、過膨張流れの様な、ノズル内で発生する衝撃波と境界層の干渉を伴う流れ場を定量的に可視化した例はほとんど報告されていない。

よって、本研究では、二次元ベンチュリノズルを通る低レイノルズ数過膨張流れをレインボーシュリーレン法により定性的及び定量的に調査する。

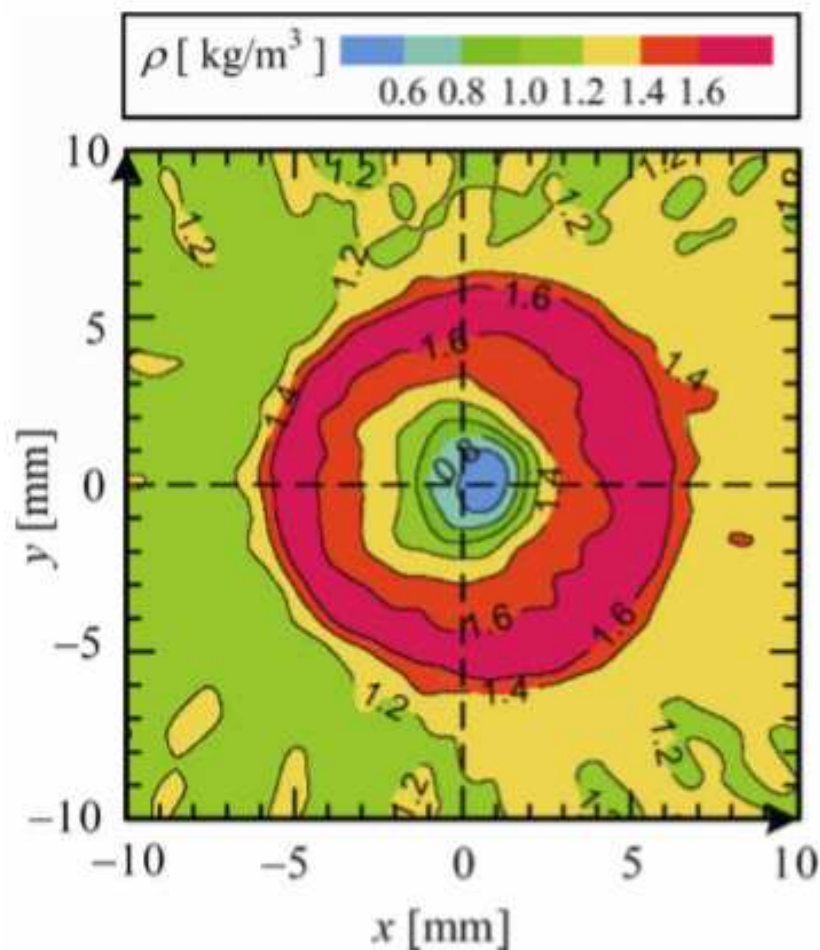


図 4.16 半径方向の等密度分布

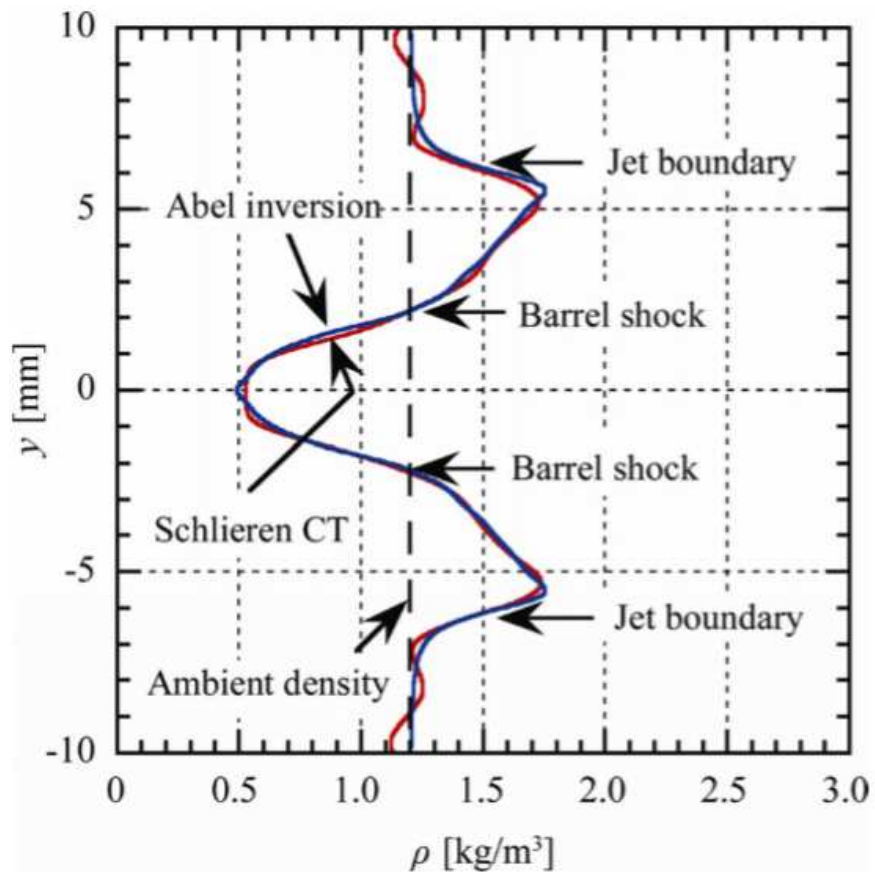


図 4.17 ノズル中心軸上の半径方向密度分布



### 4.3 マッハ・ツェンダー干渉計

図 4.18 にマッハ・ツェンダー干渉計の基本配置図を示す。図中の  $M_1$ ,  $M_2$  は平面鏡,  $BS_1$ ,  $BS_2$  は光の半分を反射し, 半分を通過させるビームスプリッター,  $C_1$ ,  $C_2$  は風洞の測定部で窓ガラスと同材質, 同一厚みをもち, 測定部に流れがない場合に, 光路  $BS_1$ - $M_1$ - $BS_2$  と  $BS_1$ - $M_2$ - $BS_2$  の光路長を等しくするための補償ガラスである。光源からの光は, レンズ  $L_1$ , フィルタ  $F$  を通り, 単色光の平行光束となり, ビームスプリッター  $BS_1$  によって, 補償ガラスを通る光束と, 測定部を通る光束とに等量に二分され, 二つ目のビームスプリッター  $BS_2$  の後で重ね合わされる。これら二つの光束はコヒーレントであるから,  $BS_2$  の後で重ね合わされる際, 光路  $BS_1$ - $M_1$ - $BS_2$  と  $BS_1$ - $M_2$ - $BS_2$  との間に光路差  $\lambda$  があれば, 両光束は干渉する。使用単色光の真空中の波長を  $\lambda_0$  とすれば,  $\lambda$  が半波長  $\lambda_0/2$  の奇数倍であれば, 二つの光の山と谷が重なって互いに弱めあい暗い縞を生じ, 偶数倍であれば互いに強め合っ明い縞を生じ, スクリーン上には縞模様が見れる。このように光の干渉を用いて可視化するマッハ・ツェンダー干渉計は, (1) 密度の等しいところが干渉縞となって観察される等密度干渉法と, (2) 密度変化を始め平行である縞の移動量から求める平行縞干渉法の二種類に分類される。

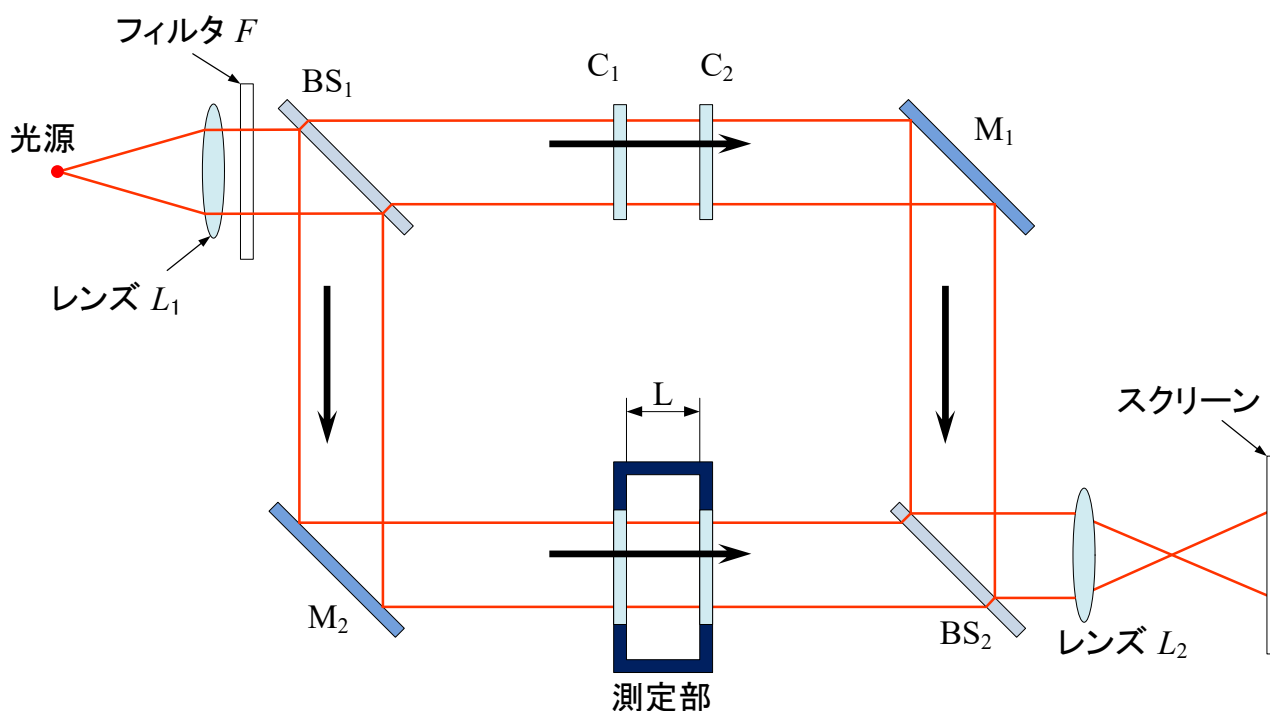


図 4.18 マッハ・ツェンダー干渉計の基本配置図

### (1) 等密度干渉縞法

流れを流す前の二つの光線に光路差がない場合、流れを流せば測定部を通る光の速度が変化し、光路差を生じる。二次元噴流の場合、この時の光路差は、測定部を通る光束  $F_2$  と測定部を通らない光束  $F_1$  との間に生じるスクリーンに到達するまでの時間差と大気中の光速との積である。

真空から測定部への屈折率  $n$  が真空から大気の屈折率  $n_a$  より大きいとして、この時間差を  $\Delta t$  とおくと、

$$\Delta t = \frac{L}{c_a} - \frac{L}{c}$$

したがって  $F_1$  と  $F_2$  の光路差  $\Delta$  は、

$$\Delta = \left( \frac{L}{c_a} - \frac{L}{c} \right) c_a \quad (4.5)$$

ただし測定部の長さを  $L$ 、測定部の光速を  $c$ 、大気中の光速を  $c_a$  とする。

また真空中から測定部の屈折率  $n$  は測定部の光速  $c$  と真空中の光速  $c_0$  を用いて以下のようにならわされる。

$$n = \frac{c_0}{c}$$

したがって式(4.5)を書き換えると

$$\Delta = \frac{L}{n_a} (n_a - n) \quad (4.6)$$

また屈折率  $n$  と密度  $\rho$  との間には、次の実験式が十分よい精度で成立する。

$$n = 1 + K\rho$$

ここでの  $K$  はグラッドストーン・デイル定数と呼ばれ、気体固有の定数である。

この関係を式(4.6)に代入すると

$$\Delta = \frac{KL}{n_a} (\rho_a - \rho) \quad (4.7)$$

スクリーン上で暗線が現れるとき、二つの光速の光路差は半波長ずれるのでこのように表すことができる。

$$\Delta = \frac{2N - 1}{2} \lambda_a \quad (4.8)$$

ただし、 $N$  は整数、 $\lambda_a$  は大気中の光の波長である。

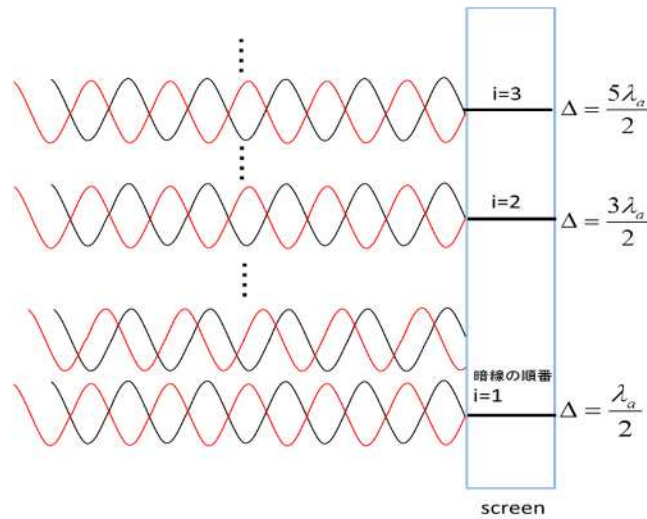


図 4.19 暗線と光路差との関係

図 4.19 から明らかなように、もし流れがない状態での二つの光路差が完全に 0 ならば、スクリーン上の一番端にあらわれる第 1 本目の暗線における光路差は  $\lambda_a/2$  である。続いて 2, 3 本目における光路差は  $3\lambda_a/2$ ,  $5\lambda_a/2$  となる。したがって縞の順番と光路差には次の式で示されるような関係がある。

$$\Delta = \frac{2i-1}{2} \lambda_a \quad (4.9)$$

ただし縞の順番を  $i$  とする。

また光は媒質によって周波数  $f$  が変わらないので、真空中の光の波長  $\lambda_0$  と媒質を通る光の波長  $\lambda_a$  は次のような関係がある

$$f = \frac{c_0}{\lambda_0} = \frac{c_a}{\lambda_a} = \frac{c_0}{n_a \lambda_a} \quad (4.10)$$

式(4.10)を考慮すると式(4.7)と式(4.9)より、暗線の順番から密度を算出することができる。

$$\rho_a - \rho = \frac{2i-1}{2KL} \lambda_0 \quad (4.11)$$

しかし実際の計測では暗線の順番がはっきりしないことが多い。この場合には任意の一つの暗線  $i=N$  における密度  $\rho_N$  と  $i=N+m$  の暗線の密度  $\rho_{N+m}$  の縞における密度の関係は、

$$\rho_{N+m} = \rho_N - \frac{m}{KL} \lambda_0 \quad (4.12)$$

とあらわされるので、ある暗線における密度を何らかの方法で測定すればそのほかの暗線における密度を算出することができる。

式(4.11)もしくは式(4.12)からもわかるように等密度干渉法は暗線の順番だけで密度を算出できるので極めて解析が容易である。しかし干渉縞の密度は光の半波長ごとでしか計測することができない。一方、平行縞干渉法は干渉縞写真の解析が困難ではあるが等密度干渉法より精度の高い密度場測定が可能である。

(2) 平行縞干渉法

図 4.20 において、測定部に流れのない状態で、 $BS_1$ ,  $BS_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  を完全に平行に置き、測定部に流れがない状態での光路差がゼロにし、スクリーン上に一様な明るさの像を作る。この状態から  $BS_1$ ,  $BS_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  の内の一つをわずかに回転すれば、補償ガラスを通った光  $F_1$  と、流れがない状態での測定部を通った光  $F_2$  は、 $BS_2$  の後で干渉し、互いに平行で一様な間隔  $b$  の干渉縞ができる。例として  $BS_2$  を紙面に垂直な軸の周りに回転すれば、紙面に垂直な平行縞、水平な軸の周りに回転すれば水平な平行縞、垂直と水平の両軸の周りにそれぞれ回転すれば、任意の向きの平行縞が得られる。また縞の間隔も回転角によって狭くも広くもできる。

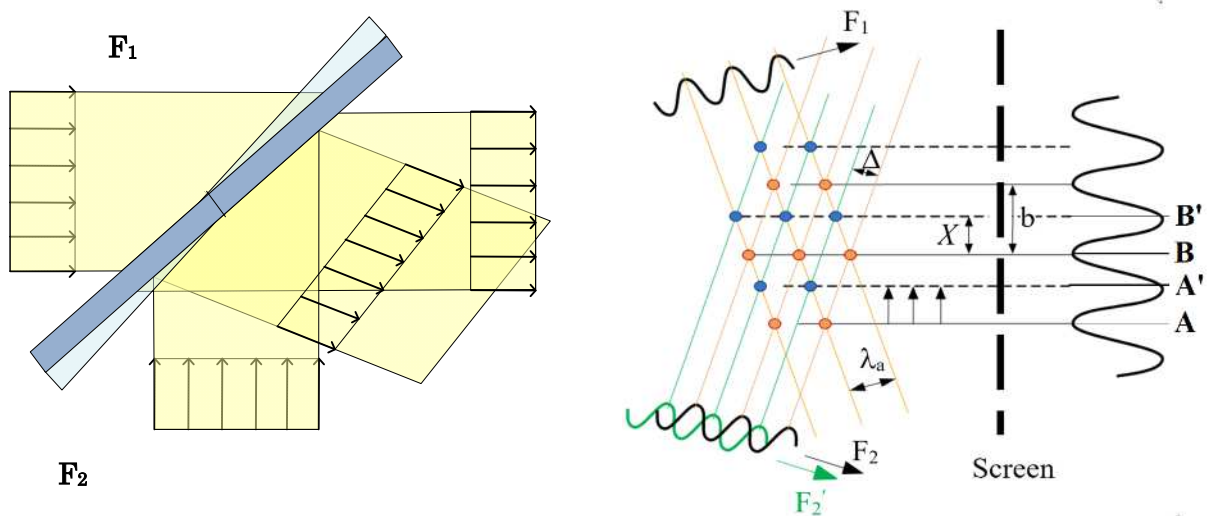


図 4.20  $BS_2$  を回転することによる干渉縞と移動縞の関係

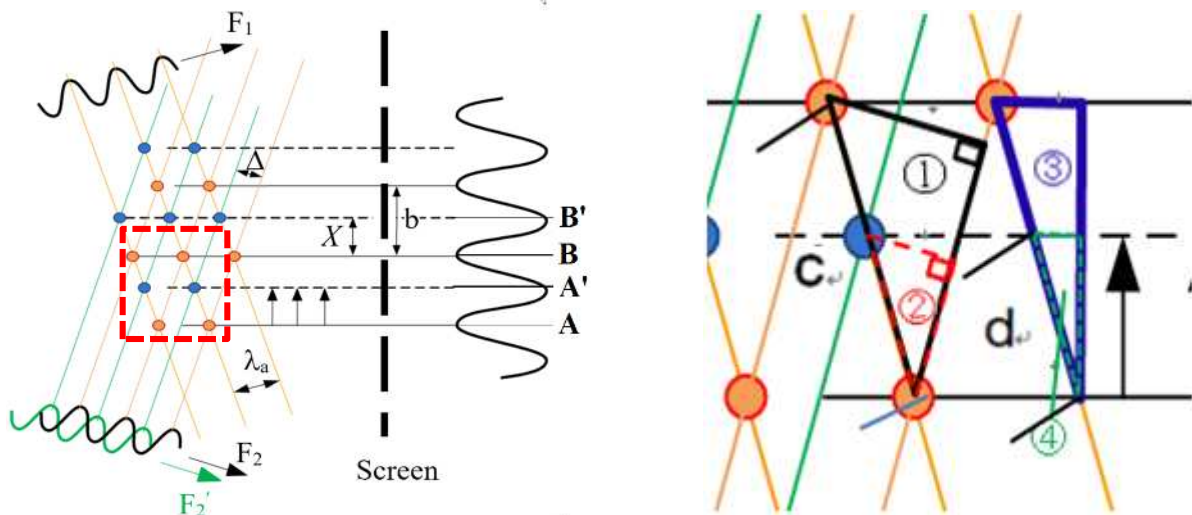


図 4.21 図 4.20 の拡大部

干渉縞を作った後、気流を流すと測定部における流れの密度変化に応じた光路差が生じ、測定部を通る光は図 4.20 の  $F_2'$  で示すように、元の光  $F_2$  と位相がずれ、縞の位置は A から A', B から B' へ移動する。いま図に示すように、光  $F_2$  と  $F_2'$  の光路差を  $\Delta$  とする。ここで図 4.21 の右図に示すように補助線を引くことでそれぞれ色分けした三角形①、②、③、④を考える。三角形①の斜辺を  $c$ 、三角形④の斜辺を  $d$  とすると、まず三角形①と②では相似なので次式を導くことができる。

$$\begin{aligned}\lambda_a \Delta &= c : d \\ \lambda_a d &= \Delta c\end{aligned}\tag{4.13}$$

同様に三角形③と④について、

$$\begin{aligned}b : X &= c : d \\ bd &= cX\end{aligned}\tag{4.14}$$

したがって式(4.13)と式(4.14)を連立すれば、縞の移動量は以下のように表すことができる。

$$\frac{X}{b} = \frac{\Delta}{\lambda_a}\tag{4.15}$$

式(4.15)を式(4.7)に代入すれば、

$$\rho = \rho_a - \frac{\lambda_a}{KL} \left( \frac{X}{b} \right)\tag{4.16}$$

上式より縞の移動量  $X$  がわかれば、密度  $\rho$  が得られる。

等密度干渉縞法では、流れ場の等密度線が簡単に得られるが、密度変化が計算できるのは光の 1 波長ごとである。これに対し、平行干渉縞法では、光路差の 1 波長以下でも細かく読み取れるので、小さい密度変化であっても検出でき精度がよい。よって、本研究では平行縞干渉縞法を採用した。

本研究ではマッハ・ツェンダー干渉計と高速度カメラを組み合わせることで、二次元ベンチュリノズル内で発生する衝撃波振動の測定を実施する。衝撃波振動の測定については、4.1 節で述べたように、シュリーレン法でも測定可能だが、この手法の場合、衝撃波自体の振動しか捉えることができない。これに対し、マッハ・ツェンダー干渉計では、衝撃波を定性的に観察することが難しい一方、任意の点における縞の移動量を解析することで、測定範囲内のあらゆる位置における振動を測定することができる。

## 第5章 実験装置

本章では、実験に使用した装置や測定方法について述べる。5.1節では、実験で使用した二次元ベンチュリノズルの詳細について述べる。5.2節では、レインボーシュリーレン法の光学系と実験装置の詳細について述べ、レインボーシュリーレン写真の撮影方法を説明する。5.3節では、マッハ・ツェンダー干渉計と実験装置の詳細について述べ、マッハ・ツェンダー干渉計を用いた干渉縞写真の撮影方法について説明する。その後、干渉縞写真の解析方法について説明する。5.4節では、本研究におけるレイノルズ数の計算方法について説明する。

### 5.1 二次元ベンチュリノズル

本実験で用いた二次元ベンチュリノズルの外観写真を図 5.1、その形状及び寸法を図 5.2、5.3 に示す。本実験で用いた二次元ベンチュリノズルの形状は、ISO9300<sup>[2]</sup>で規格されているトロイダルスロートベンチュリノズルと同形状である。ノズルは先細末広形状で、全長 12mm、スロート高さ 8mm、奥行き方向に 12mm の厚さをもっている。また、ノズル側壁部には内部流れを光学的に可視化するため、光学ガラスを挿入している。さらに、ノズルの上下壁面には、直径 0.5 mm の静圧孔を 1 mm 間隔で上下壁面で合計 21 個設けてある。本実験では、図 5.3 に示すように、各静圧孔からゲージ管とチューブを介して 21 点の壁面静圧値を測定した。

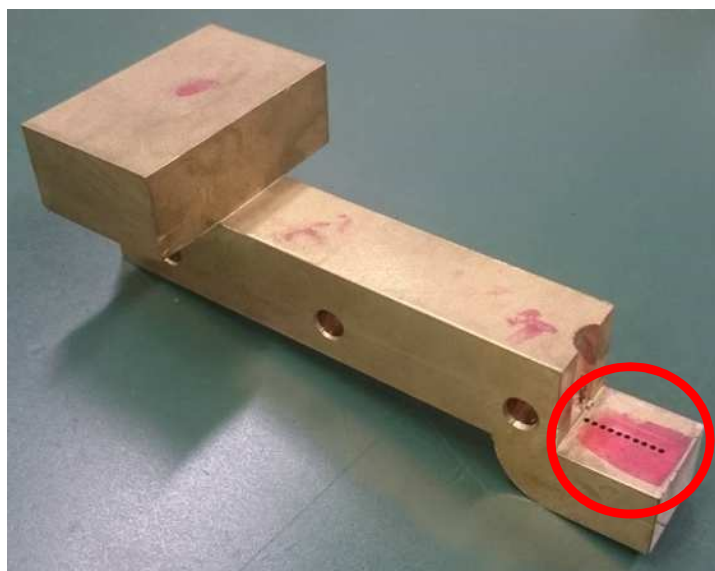


図 5.1 二次元ベンチュリノズル

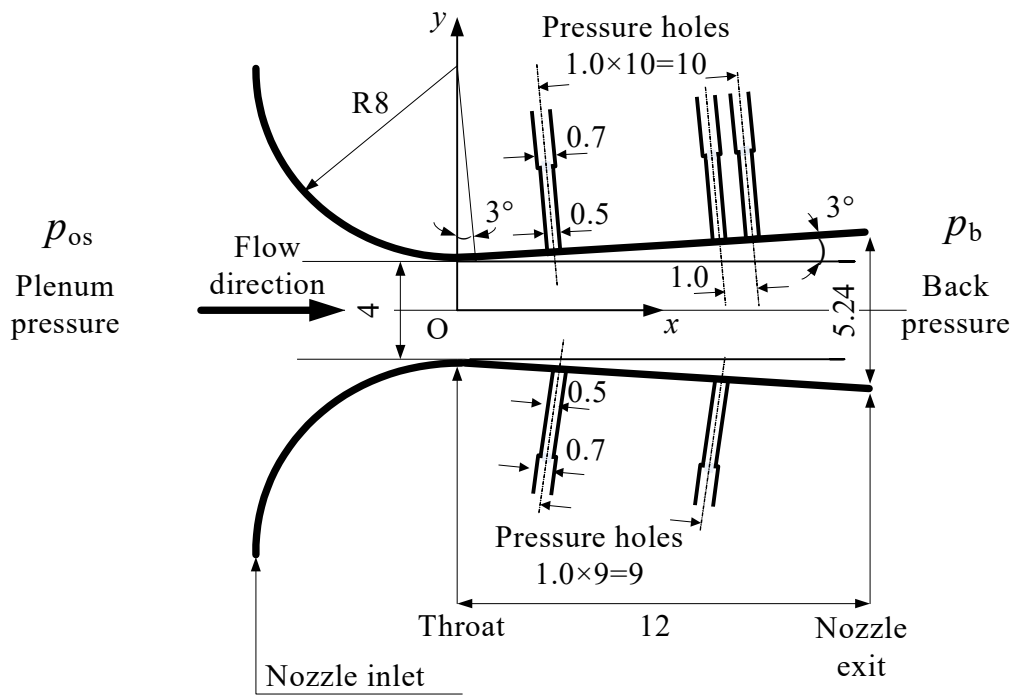


図 5.2 二次元ベンチュリノズル概要図

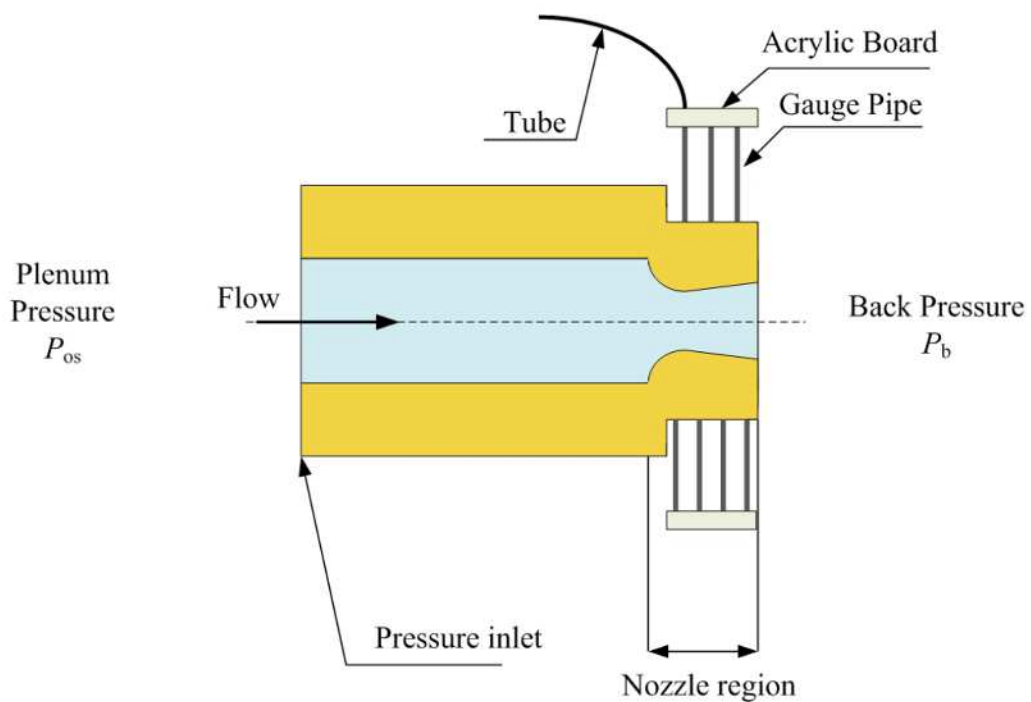


図 5.3 壁面静圧測定用ノズル概要図

## 5.2 レインボーシュリーレン法

### 5.2.1 実験装置の構成

図 5.4 に大気吸い込み式風洞の外観図, 図 5.5 にレインボーシュリーレン光学系の外観図をそれぞれ示す. 圧縮機によって高圧タンク(  $2\text{m}^3, 1\text{MPa}$  ) に蓄えられた乾燥空気を手動弁を通過して集合洞で一旦よどみ状態とさせた後, 供試ノズルを通して大気中へ放出させる. 図 5.6 に光学系の模式図および座標系を示す. レインボーシュリーレン光学系は直線上で配置するために直線のレール上に固定させている. 光学系は, 図 5.6 に示すように, 点光源を出力するための光源装置, 焦点距離  $500\text{mm}$ , 直径  $100\text{mm}$  のアクロマティックレンズ 2 枚, コンピューターで作製した幅  $1.4\text{mm}$  の連続的な色相をもつ長さ  $23\text{mm}$  のレインボーフィルター, そしてデジタルカメラで構成されている. また, デジタルカメラの露光時間は  $1/20$  に調整し, 光源装置は光ファイバーケーブルに接続された連続多岐な  $250\text{W}$  のメタルハライド光源, 焦点距離  $16.56\text{mm}$  の対物レンズ, そして直径  $50\mu\text{m}$  のピンホールを連結して構成されている. さらに, RGB 表示形式のカメラ画像をデジタル処理するため, 24 ビットカラーフレーム取り込み器をもつパーソナルコンピューター(PC)を使用した. 実験装置の構成機器を表 5.1 に示す.

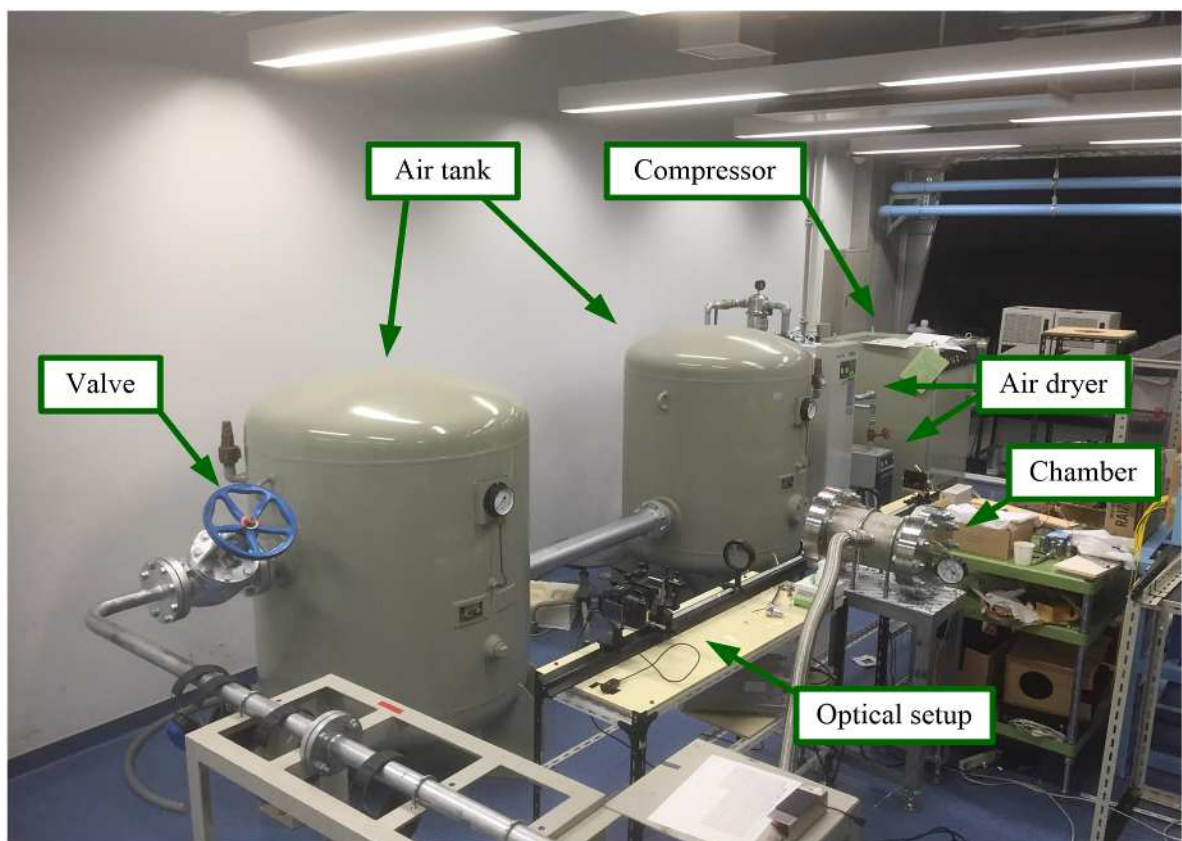


図 5.4 大気吸い込み式風洞外観図



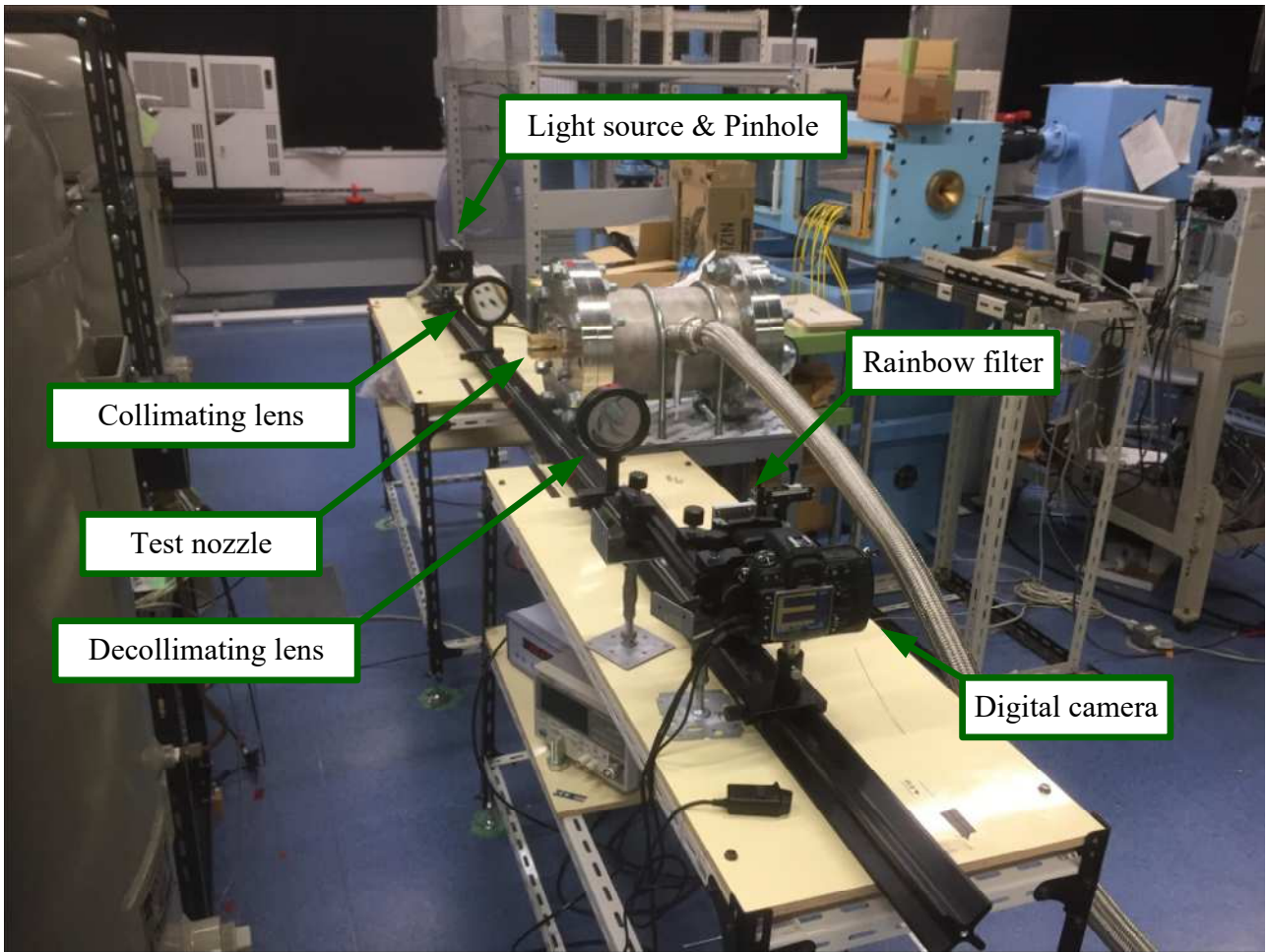


図 5.5 レインボーシュリーレン光学系外観図

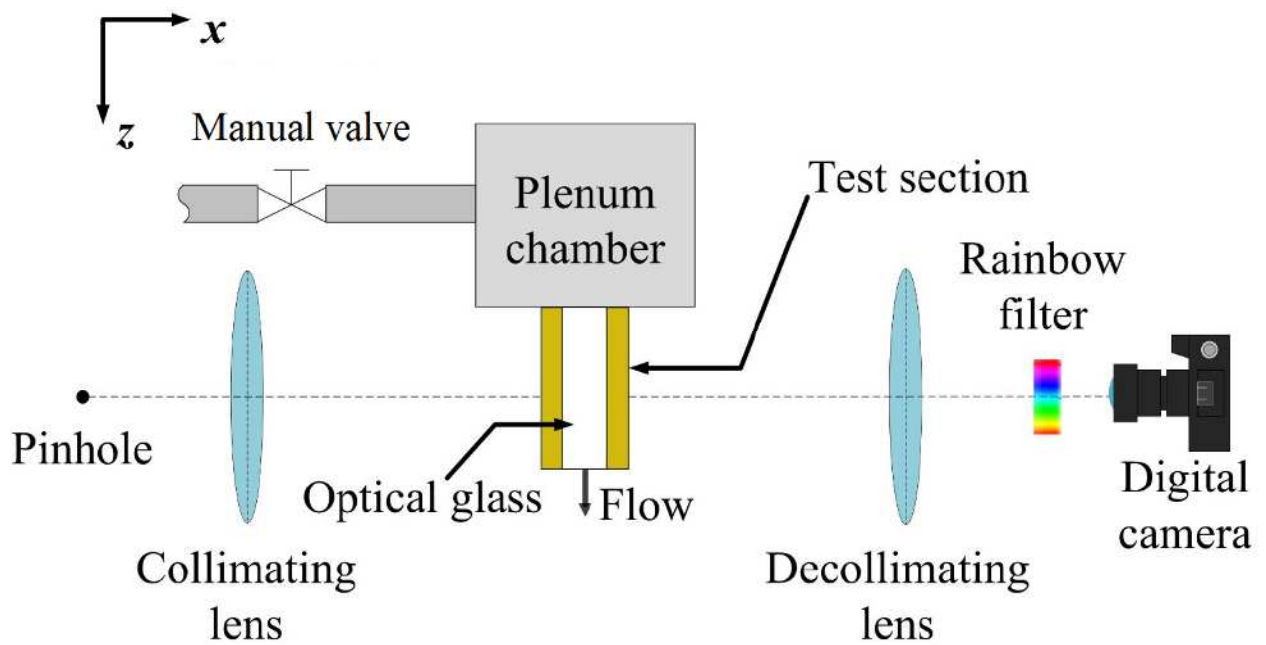


図 5.6 レインボーシュリーレン光学系外観図

表 5.1 レインボーシュリーレン光学系の構成機器一覧

装置名	メーカー	品番	備考
乾燥空気供給装置			
コンプレッサー	株式会社田邊空気機械製作所	TASK-1015E	
エアードライヤー	ORION MACHINRY Co., LTD.	RAX15F-SE	
高圧タンク	株式会社田邊空気機械製作所	LHC-55AYN	1m <sup>3</sup> , 1.05MPa
圧力制御弁		10K-100SKITZ	
噴流装置			
二次元ベンチュリノズル	-	-	特注*
集合洞	-	-	特注*
圧力検出装置			
圧力センサー	JTEKT 株式会社	PMS-5M2M	-100kPa~2MPa
増幅器	JTEKT 株式会社	AA6210	
光学系			
球面アクロマティックレンズ	シグマ光機株式会社	DLB-100-500PM	2 枚
対物レンズ	シグマ光機株式会社.	OBL-10	
精密ピンホール(スリット)	シグマ光機株式会社.	PA-50	
メタルハライドファイバー	シグマ光機株式会社.	IMH-250	
光ファイバーケーブル	シグマ光機株式会社	MDL-1000S-10	
デジタルカメラ	ニコン株式会社	D300	
ベローズアタッチメント	ニコン株式会社	PB-6	
レインボーフィルター			

### 5.2.2 レインボーフィルター

図 5.7 に本実験で用いたレインボーフィルターの形状及び寸法を示す．また，図 5.8 に背景色相写真を示す．本研究では，レインボーフィルターの設置方向を変位方向に対して横向きとしている．これは，衝撃波等，流れ方向の密度勾配を捉えることに適しているためである．

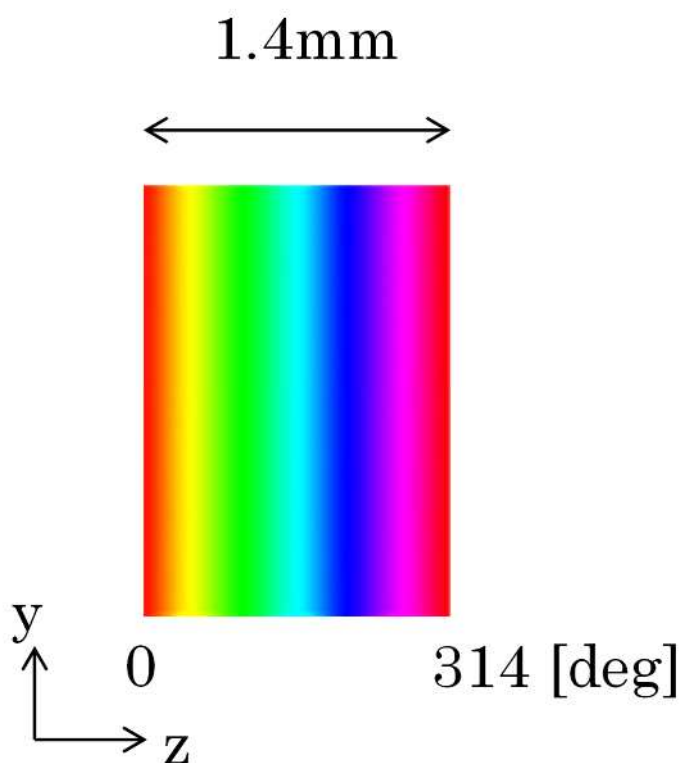


図 5.7 レインボーフィルター

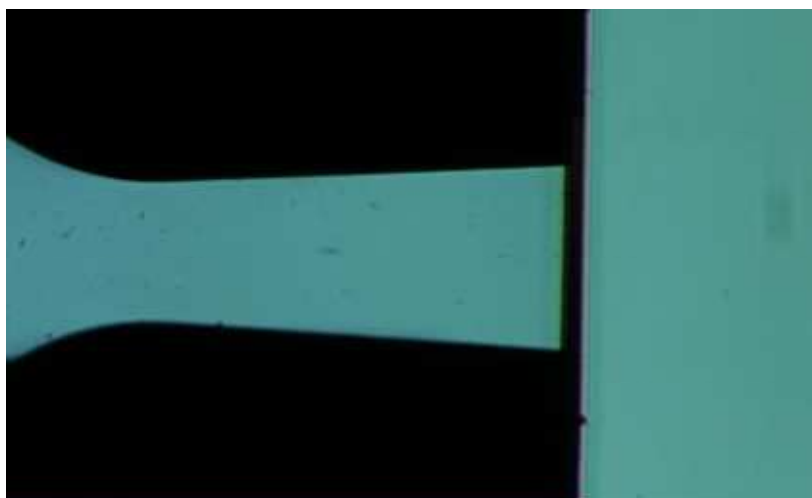


図 5.8 レインボーシュリーレン写真の背景色相

### 5.2.3 レインボーシュリーレン法の実験方法

本実験では二次元ベンチュリノズルを用いて、背圧（大気圧） $p_b$ と集合洞圧力 $p_{os}$ の比 $p_b/p_{os}$ （以下、背圧比）を0.65～0.50の範囲で手動弁により調節し、背圧比0.65, 0.60, 0.55, 0.50における流れ場のレインボーシュリーレン写真撮影を行った。本実験システムは乾燥空気の供給装置, 光学系装置, レインボーシュリーレン写真撮影装置によって構成されている。以下にそれぞれの装置の実験準備及び実験方法についてまとめる。

#### <乾燥空気の供給装置>

1. ブレーカーの電源をONにする。
2. 手動弁がしっかり閉まっていることを確認する。
3. エアードライヤーの電源をONにする。
4. コンプレッサーの電源をONにして、乾燥空気が高压タンクに十分貯蔵されるまでしばらく待つ。
5. 手動弁を徐々に開いて乾燥空気を供給する。
6. 乾燥空気の供給を止める際は手動弁をしっかりと閉め、高压タンク内に水分が入らないようにするため、コンプレッサー、エアードライヤーの順に電源をOFFにする。

#### <光学系装置>

1. コリメータレンズ, 集光レンズ, レインボーフィルター, デジタルカメラが一直線になるようにレールを配置する。
2. 対物レンズの焦点距離16.56mmの位置にピンホールを設置し, 集光させる。
3. コリメータレンズの焦点距離500mmにピンホールを設置する。
4. 円筒ノズルを集合洞に取り付け, コリメータレンズと集光レンズの間(以下, 測定領域)に設置する。
5. 集光レンズの焦点距離500mmにレインボーフィルターを設置する。この際, レインボーフィルター上に投影される光源像の大きさが最小になるように調節する。
6. 光源装置より光源を照射し, 測定領域での光束が平行になっているか確認する。
7. 二次元ベンチュリノズルの出口にスケールを当て, デジタルカメラに目盛りがはっきりと映るようにカメラレンズのピントを合わせ, 写真を撮影する。

#### <写真撮影>

1. 室内灯を消し, 乾燥空気を供給する。
2. 圧力センサーの測定値を見ながら, 手動弁を圧力比 $p_b/p_{os}=0.65\sim 0.50$ の範囲で調節し, 設定した背圧比でレインボーシュリーレン写真を撮影する。

### 5.3 マッハ・ツェンダー干渉計

#### 5.3.1 実験装置の構成

図 5.9 に光学計装置の全体図，図 5.10 に光学系の概略図を示す．図 5.9 に示すように，He-Ne レーザーから出たレーザー光を凹レンズによって拡散させる．その後レーザー光は，凸レンズを通ることで平行光となり平面鏡で反射される．平行光は一つ目のハーフミラーによって参照光路と測定部を通過する試験光路に二分される．これらの二分された試験光路は，平面鏡によってそれぞれ反射され，二つ目のハーフミラーによって，二つの光束は重ね合わされ干渉する．この際観察される干渉縞が凸レンズを通して，高速度カメラで記録される．

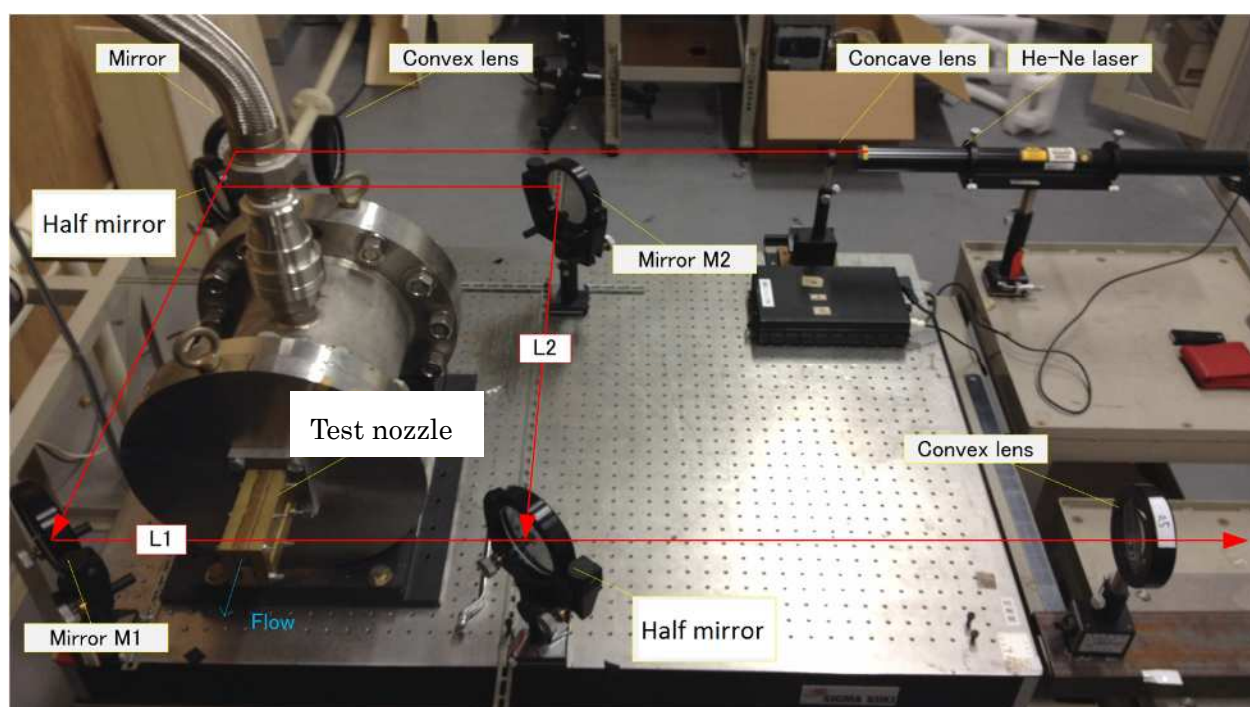


図 5.9 マッハ・ツェンダー干渉計外観図

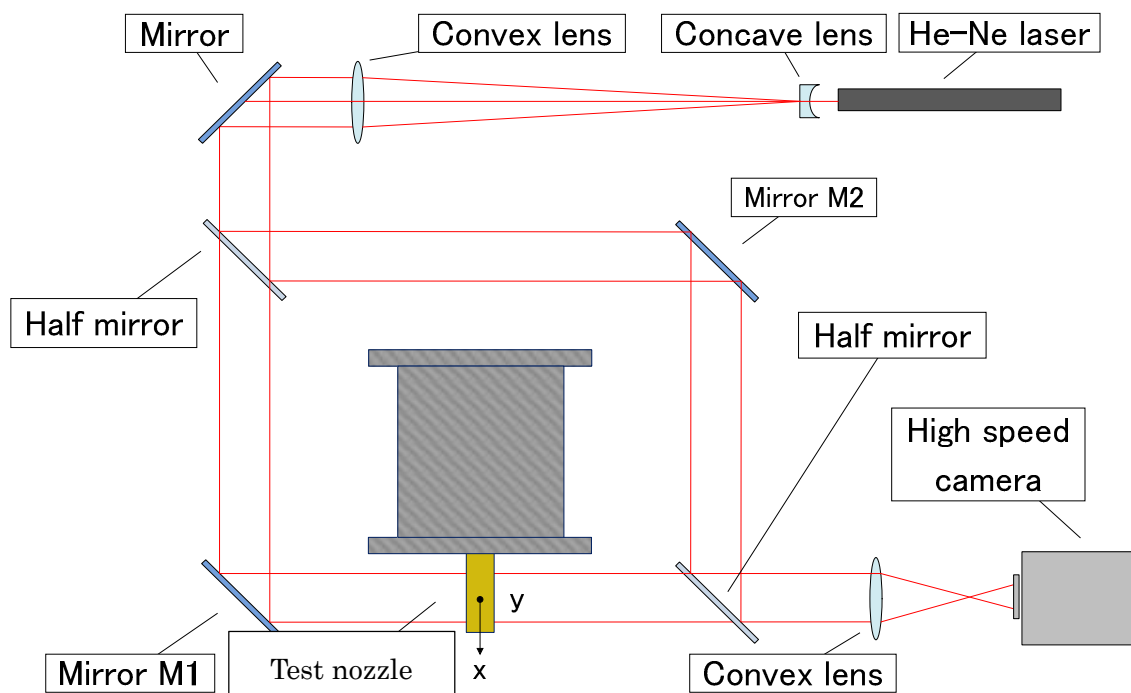


図 5.10 マッハ・ツェンダー干渉計の概略図

### 5.3.2 高速度カメラ

本研究で使用した高速度カメラの写真を図 5.11 に示す。またその仕様を表 5.2 に示す。



図 5.11 高速度カメラ

表 5.2 高速度カメラの仕様

撮像方式	C-MOS イメージセンサー
外形寸法	165×153×242.5 (HWD) mm
質量	7.15kg
電子シャッター	最小 370ns (1/2,700,000 秒)

### 5.3.3 マッハ・ツェンダー干渉計の実験方法

以下の手順で光学計を調整し，平行干渉縞法で可視化した。

#### <乾燥空気の供給装置>

1. ブレーカーの電源を ON にする。
2. 手動弁がしっかり閉まっていることを確認する。
3. エアードライヤーの電源を ON にする。
4. コンプレッサーの電源を ON にして，乾燥空気が高压タンクに十分貯蔵されるまでしばらく待つ。
5. 手動弁を徐々に開いて乾燥空気を供給する。
6. 乾燥空気の供給を止める際は手動弁をしっかりと閉め，高压タンク内に水分が入らないようにするため，コンプレッサー，エアードライヤーの順に電源を OFF にする。

#### <光学系装置>

1. ハーフミラーと平面鏡を図 5.9 のように長方形の頂点の位置に設置する。
2. ハーフミラーと平面鏡それぞれ実験台に対して垂直になるように調整する。次に  $y$  軸回りに  $45^\circ$  回転させ，流れがない状態で試験光路と参照光路の光路差がゼロになるように 2 つの光路で長方形を作る。この状態ではスクリーンに映る像は一樣な明るさである。
3. 二つ目のハーフミラーを  $y$  軸周りにわずかに回転させ，一樣な明るさの像から，縦縞の像を作る。縞の間隔は  $y$  軸周りの回転角を変えることで調整する。

#### <写真撮影>

1. 乾燥空気の供給を開始する。
2. 圧力センサーの測定値を見ながら，手動弁の調節をし（背圧比 0.65），高速度カメラでディフューザのスロート付近にピントを合わせ，干渉縞写真を撮影する。

以上の手順で可視化実験を行った。本実験では計 2000 枚の画像を高速度カメラで撮影した。実験条件を表 5.3 に示す。また本実験では，マッハ・ツェンダー干渉計との比較のため，シュリーレン写真の撮影も行った。シュリーレン写真の撮影は，図 5.10 の参照光路を遮り，焦点位置にナイフエッジを置くことで 2000 枚の画像を撮影した。

表 5.3 実験条件

真空中の光の波長： $\lambda_0$	632.82 [nm]
グラッドストーン・デイル定数： $K$	$2.2587 \times 10^4$ [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ]
シャッタースピード	1/335000 [s]
フレームレート	30000 [fps]

### 5.3.4 干渉縞写真の解析方法

マッハ・ツェンダー干渉計では実験により撮影した干渉縞写真から縞の移動量を定量化し、その値を使って密度分布を算出することができる。本章では、干渉縞写真から密度算出までの過程について説明する。

撮影した画像から、密度を求める一連の流れを図 5.12 に示す。まず、撮影画像のうち一枚を基準画像とし、残りの画像と比較してフーリエ変換法を使用することで縞の移動量を求める。次に、移動量の時間平均値を求め、移動量から時間平均値を引くことで縞の移動量の変動が算出することが可能である。

最後に式(4.16)を使うことで、縞の移動量変動から密度を求めることができる。

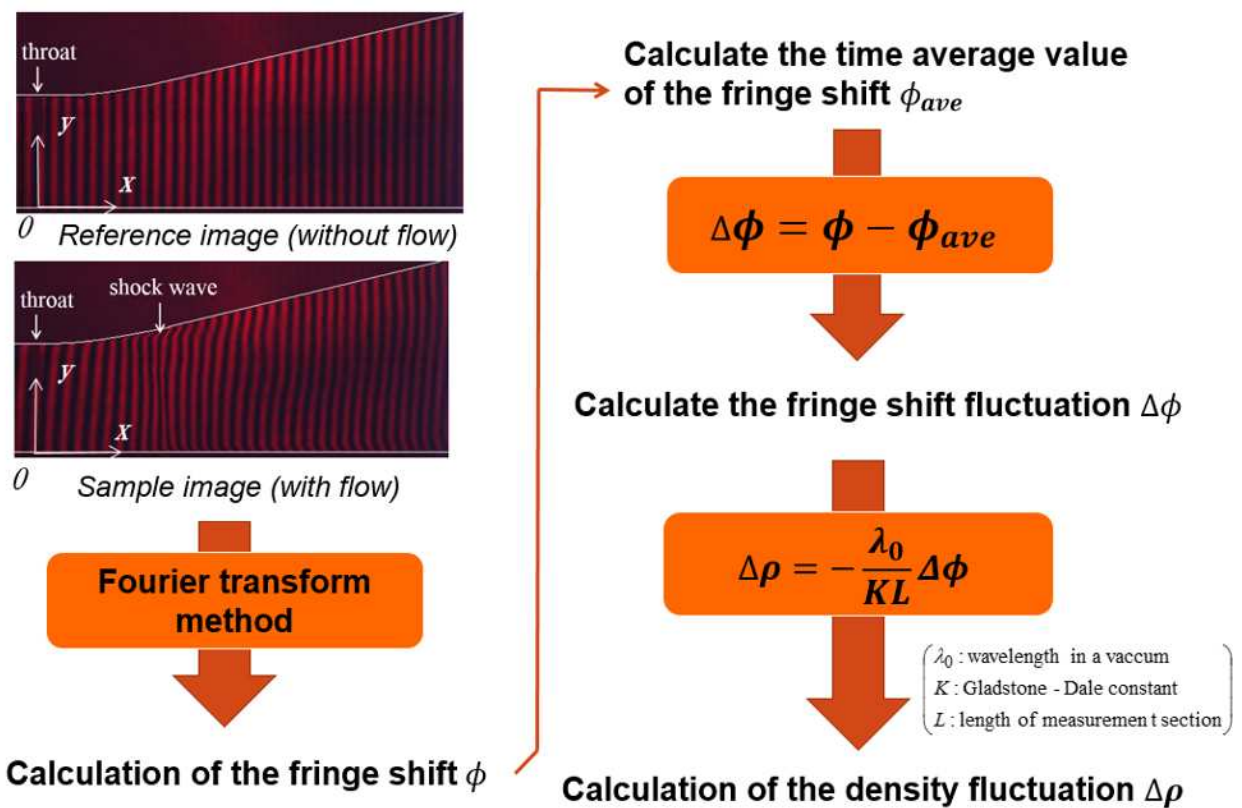


図 5.12 干渉縞移動量の解析手順

次に縞の移動量の算出方法について述べる。

図 5.12 に基準縞と移動後の縞の波形及び撮影写真の概略図をそれぞれ示す。本図中の赤い実線は、測定部に流れがない場合の基準縞を示している。背景縞から次の縞までの2点間の間隔  $b$  は、参照光と試験光の交差角度と使用するレーザー光の波長の関数により決定される。



ここで、移動後の縞について、干渉縞の強度分布を以下の式で表すことができる。

$$g(x, y) = g_0(x, y) + g_1(x, y) \cos[k_0 x + \Delta\varphi(x, y)] \quad (5.1)$$

式(5.1)には求めるべき縞の移動量  $\Delta\varphi(x, y)$ 、および反射や透過など試験光が測定部を通過する際に得られる不要な放射輝度  $g_0(x, y)$ 、 $g_1(x, y)$ が含まれている。なお、上式において  $k_0 = 2\pi/b$  である。また、座標  $x$  と  $y$  は、試験光が伝播する方向に対して垂直な平面、 $z$  軸は試験光の伝播方向を示している。

式(5.1)はオイラーの公式を用いて以下の様に表すことができる。

$$g(x, y) = g_0(x, y) + c(x, y) \exp(ik_0 x) + c^*(x, y) \exp(-ik_0 x) \quad (5.2)$$

$$c(x, y) = \frac{1}{2} g_1(x, y) \exp[i\Delta\varphi(x, y)] \quad (5.3)$$

式(5.2)において、 $i$ は虚数、 $*$ は複素共役数をそれぞれ示す。

ここで、式(5.2)をフーリエ変換すると

$$G(k, y) = G_0(k, y) + C(k - k_0, y) + C^*(k + k_0, y) \quad (5.4)$$

式(5.4)において、大文字はフーリエ変換時の不定積分、 $k$ は $x$ を波数空間表示した値をそれぞれ表している。

ここで、縞の間隔が十分に小さい場合、 $g_0(x, y)$ 、 $g_1(x, y)$ 、および  $\Delta\varphi(x, y)$ の空間変動は空間周波数  $k_0$ と比較して遅いため、式(5.4)のフーリエスペクトル  $k_0$ で分離され、図 5.14 (a)で示す様な3つの独立したピークで表すことができる。

次に、波数空間上の  $C(k - k_0, y)$ を原点方向に向かって  $k_0$ 移動させた後、不要な変数  $G_0(k, y)$ 、 $C^*(k + k_0, y)$ をバンドパスフィルタで除去することで、図 5.14 (b)で示す様に  $C(k, y)$ の成分のみを抽出することができる。

さらに、式(5.3)から変数  $k$ についてフーリエ逆変換し、両辺の対数をとることで、以下の式(5.5)を得ることができる。

$$\ln c(x, y) = \ln \frac{g_1(x, y)}{2} + i\Delta\varphi(x, y) \quad (5.5)$$

よって、式(5.5)中の虚数部  $\Delta\varphi(x, y)$ から縞の移動量を得ることができる。

こうして、任意の位置における光の強度からその位置における縞の移動量を算出することができる。

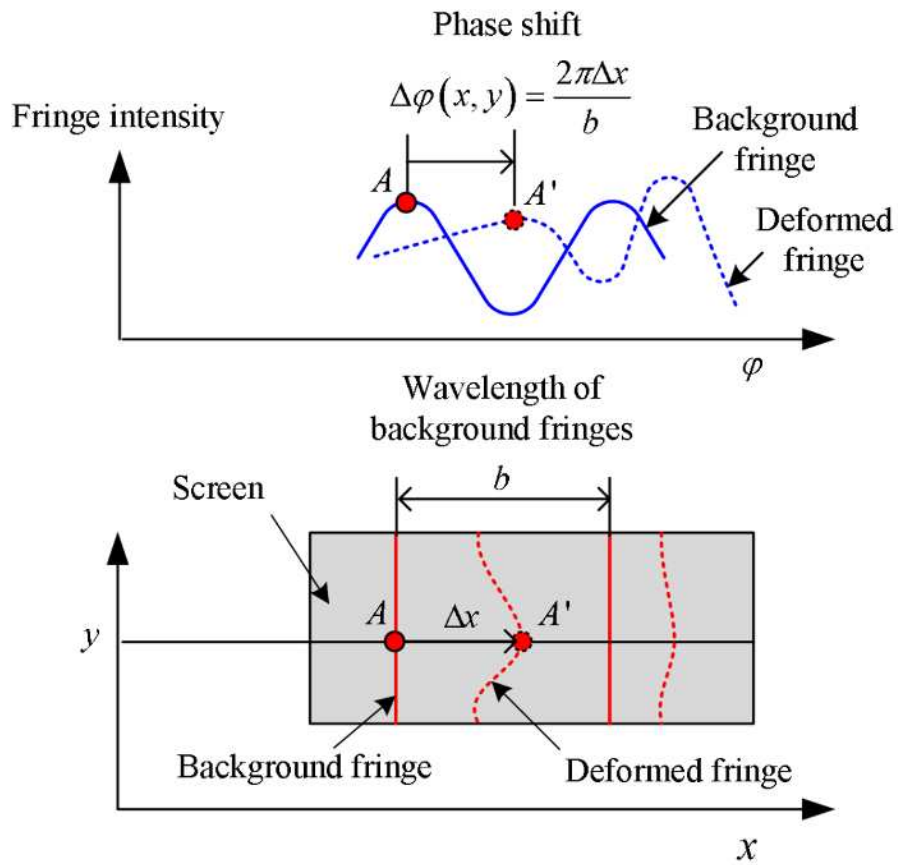
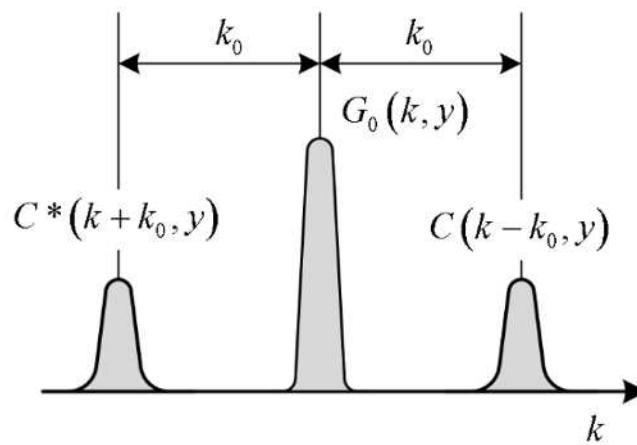
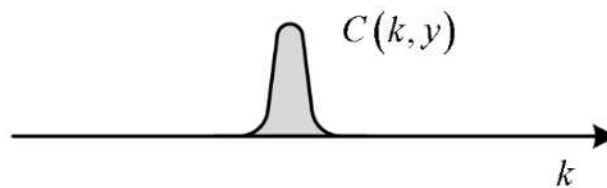


図 5.13 干渉縞の波形及び撮影写真



(a) Separated Fourier spectra



(b) Parallel translation of single spectrum selected

図 5.14 光の強度分布の波数空間表示

## 5.4 レイノルズ数

本研究では、過去の低レイノルズ数圧縮性流れに関する研究<sup>[4,17]</sup>との比較のため、実験条件からスロート高さを代表長さとする、レイノルズ数  $Re$  の算出を行った。

レイノルズ数は、流れの慣性力と粘性力との比を表す無次元数である。

スロートでの密度を  $\rho$ 、スロート高さを  $h$ 、流速を  $u$ 、粘性係数を  $\mu$  とすると、スロート高さ  $h$  を代表長さとするレイノルズ数は以下の式で表される。

$$Re = \frac{\rho u h}{\mu} \quad (5.6)$$

ここで、スロートにおける流速  $u$  が音速、つまりチョーク状態であると仮定すると、密度  $\rho$  は、ノズル上流の全圧  $p_0$ 、全温度  $T_0$  とすると、理想気体の状態方程式  $p = \rho RT$ 、式(2.20)、および式(2.21)を用いると、以下の式で表すことができる。

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{0.528 p_0}{287.1 \cdot 0.833 T_0} \quad (5.7)$$

式(5.7)中の気体定数  $R$  は、乾燥空気について  $R=287.1[\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})]$  とした。

また、流速  $u$  は、式(2.12)を用いて、次式で与えられる。

$$u = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1.4 \cdot 287.1 \cdot 0.833 T_0} \quad (5.8)$$

さらに、粘性係数  $\mu$  は、サザランドの式、および式(2.20)によって次式で与えられる。

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T'} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T' + S}{T + S} = 17.6 \times 10^{-6} \left( \frac{0.8333 T_0}{273.2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{273.12 + 111}{0.8333 T_0 + 111} \right) \quad (5.9)$$

式(5.9)において、乾燥空気について、 $\mu_0=17.6 \times 10^{-6}$ 、 $T'=273.12[\text{K}]$ 、 $S=111[\text{K}]$  とした。

よって、式(5.6)に式(5.7)、式(5.8)、および式(5.9)を代入することで、チョーク時におけるスロートを代表長さとするレイノルズ数  $Re$  をノズル上流の全圧  $p_0$ 、全温度  $T_0$  から算出することが可能である。

また、次節で述べる数値計算においても、本節と同様の方法でレイノルズ数の算出を行っている。

## 第6章 数値計算

本研究では、低レイノルズ数域におけるベンチュリノズル内の流れ場について CFD を用いた数値計算を行う。初めに本数値計算の基礎方程式をデカルト座標系と一般座標系で示す。次に、基礎方程式の各項の差分と時間積分方法を示し、最後に計算領域と格子および境界条件について述べる。

### 6.1 基礎方程式

時間  $t$ 、位置  $x, r$ 、速度  $u, v$ 、圧力  $p$ 、密度  $\rho$ 、温度  $T$ 、粘性係数  $\mu$  をそれぞれ以下のように無次元化する。

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t}{\frac{D\sqrt{\gamma}}{c^*}}, & x' &= \frac{x}{D}, & r' &= \frac{r}{D}, & u' &= \frac{u}{\frac{c^*}{\sqrt{\gamma}}}, & v' &= \frac{v}{\frac{c^*}{\sqrt{\gamma}}}, \\ p' &= \frac{p}{p^*}, & \rho' &= \frac{\rho}{\rho^*}, & T' &= \frac{T}{T^*}, & \mu' &= \frac{\mu}{\mu^*}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

ここで、 $( )'$  は無次元量を、 $( )^*$  はノズル出口での値を示す。 $D$  はノズル出口直径、 $a$  は音速、 $\gamma$  は比熱比である。本論文では、スカラー量  $a$  の  $x$  に関する偏微分  $\frac{\partial a}{\partial x}$  を  $a_x$  と表す。

本数値解析の基礎方程式はレイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式（以下、RANS 方程式と呼ぶ）であり、式(6.1)の無次元量を用いるとデカルト座標系では以下のように表される。ただし、無次元量を表す  $( )'$  は省略する。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial r} + G = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial r} + T \right) \quad (6.2)$$

ここで、レイノルズ数  $\text{Re}$  は次式で表される。

$$\text{Re} = \frac{\rho^* (c^* / \sqrt{\gamma}) D}{\mu^*} \quad (6.3)$$

式(6.2)中の  $Q$  は保存量、 $E, F, G$  は非粘性流束であり、次式で表される。

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho v u \\ (e + p)u \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v v + p \\ (e + p)v \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 \\ (e + p)v \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

ここで、 $e$ は単位体積当たりの全エネルギーで、

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (6.5)$$

である。

また、 $R$ 、 $S$ 、 $T$ は粘性流束であり、次式で表される。

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{rx} \\ \tau_{xx}u + \tau_{rx}v + q_1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xr} \\ \tau_{rr} \\ \tau_{rx}u + \tau_{rr}v + q_2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xr} \\ t_1 \\ \tau_{rx}u + \tau_{rr}v + q_2 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

ここで、粘性応力 $\tau_{xx}$ 、 $\tau_{xy}$ などは以下の式で表される。

$$\tau_{xx} = \mu \left[ \frac{4}{3} u_x - \frac{2}{3} \left( v_r + \frac{v}{r} \right) \right] + \tau_{xx}^t \quad (6.7)$$

$$\tau_{rr} = \mu \left[ \frac{4}{3} v_x - \frac{2}{3} \left( u_r + \frac{v}{r} \right) \right] + \tau_{rr}^t$$

$$\tau_{xr} = \tau_{rx} = \mu (u_r + v_x) + \tau_{xr}^t \quad (6.8)$$

$$t_1 = 2\mu \left( u_r - \frac{v}{r} \right)$$

また、 $q_1$ 、 $q_2$ は、それぞれ $x, y, z$ 方向の熱流束であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} \right) T_x + q_1^t \\
q_2 &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} \right) T_r + q_2^t
\end{aligned} \tag{6.9}$$

ここで、 $T$  は温度であり、 $\text{Pr}$  は層流におけるプラントル数 ( $\text{Pr} = 0.72$ ) である。

RANS 方程式では常識の右辺に未知量であるレイノルズ応力項  $\tau_{xx}^t, \tau_{yy}^t, \tau_{zz}^t, \tau_{xy}^t, \tau_{yz}^t, \tau_{zx}^t$  と乱流熱流束項  $q_1^t, q_2^t, q_3^t$  が現れるため、これらの項をモデル化しなければならない。そこで、ブジネスクの渦粘性モデルを導入するとこれらは次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\tau_{xx}^t &= \mu_t \left[ \frac{4}{3} u_x - \frac{2}{3} \left( v_r + \frac{v}{r} \right) \right] - \frac{2}{3} \text{Re} \rho k \\
\tau_{rr}^t &= \mu_t \left[ \frac{4}{3} v_r - \frac{2}{3} \left( u_x + \frac{v}{r} \right) \right] - \frac{2}{3} \text{Re} \rho k
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\tau_{xr}^t = \mu_t (u_r + v_x) \tag{6.11}$$

$$q_1^t = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) T_x, \quad q_2^t = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) T_r \tag{6.12}$$

ここで、 $\mu_t$  は乱流粘性係数、 $\text{Pr}_t$  は乱流プラントル数 ( $\text{Pr} = 0.90$ ) である。

なお、 $\mu_t$  は Menter の  $k-\omega$  SST 乱流モデルにより評価する。

## 6.2 乱流モデル( $k-\omega$ SSTモデル)

本数値解析では Menter の  $k-\omega$  SST 乱流モデルを用いる。乱流運動エネルギー  $k$  と単位乱流エネルギー当たりの散逸率  $\omega$  の輸送方程式は以下の式で表される。

$$\frac{\partial Q_t}{\partial t} + \frac{\partial E_t}{\partial x} + \frac{\partial F_t}{\partial r} + G_t = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial R_t}{\partial x} + \frac{\partial S_t}{\partial r} + T_t p + \phi + B \right) \tag{6.13}$$

ここで,

$$\begin{aligned} Q_t &= \begin{bmatrix} \rho k \\ \rho \omega \end{bmatrix}, \quad E_t = \begin{bmatrix} \rho u k \\ \rho u \omega \end{bmatrix}, \quad F_t = \begin{bmatrix} \rho v k \\ \rho v \omega \end{bmatrix}, \quad G_t = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \rho v k \\ \rho v \omega \end{bmatrix} \\ R_t &= \begin{bmatrix} (\mu + \sigma_k \mu_t) k_x \\ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \omega_x \end{bmatrix}, \quad S_t = \begin{bmatrix} (\mu + \sigma_k \mu_t) k_r \\ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \omega_r \end{bmatrix}, \quad R_t = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} (\mu + \sigma_k \mu_t) k_x \\ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \omega_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.14)$$

となる。また、生成項  $P$ 、散逸項  $\phi$  および  $B$  はそれぞれ以下のように表される。

$$P = \begin{bmatrix} P_k \\ \gamma \frac{\omega}{k} P_k \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} -R_e \beta^* \rho \omega k \\ -R_e \beta \rho \omega^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2R_e \rho (1 - F_1) \rho_{\omega^2} \frac{1}{\omega} (k_x \omega_x + k_y \omega_y) \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

ここで、 $F_1$  はブレンディング関数であり、以下の式で表される。

$$\begin{aligned} F_1 &= \tanh[f_1^4] \\ f_1 &= \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega \Delta y}, \frac{500 \mu}{\rho \omega (\Delta y)^2} \right), \frac{4 \rho \sigma_{\omega^2} k}{CD_{k\omega} (\Delta y)^2} \right] \\ CD_{k\omega} &= \max \left[ 2 \rho \sigma_{\omega^2} \frac{1}{\omega} (k_x \omega_x + k_y \omega_y), 10^{-20} \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

ここで、 $\Delta y$  は壁面からの距離である。 $P_k$  は、

$$P_k = \tau_{xx}^t u_x + \tau_{rr}^t v_r + \tau_{xr}^t (u_r + v_x) \quad (6.17)$$

となる。SST モデルでは乱流粘性係数  $\mu_t$  は次式で与えられる。

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega_1, |\Omega| F_2)} \quad (6.18)$$

ここで、 $\Omega$  は渦度であり、 $F_2$  は以下の式で表される。

$$F_2 = \tanh[(f_2)^2]$$

$$f_2 = \min \left[ \frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega\Delta y}, \frac{500\mu}{\rho\omega(\Delta y)^2} \right] \quad (6.19)$$

式(6.14)-(6.19)中のモデル定数 $\sigma_k$ 、 $\sigma_\omega$ 、 $\beta^*$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  は、ブレンディング関数 $F_1$ を用いて以下のように表される。

$$\phi = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2$$

$$\phi_1 : \sigma_{k1} = 0.85, \sigma_{\omega1} = 0.5, \beta^* = 0.09, \beta_1 = 0.075, \gamma_1 = \beta_1/\beta^* - \sigma_{\omega1}\kappa^2/\sqrt{\beta^*} \quad (6.20)$$

$$\phi_2 : \sigma_{k2} = 1.0, \sigma_{\omega2} = 0.856, \beta^* = 0.09, \beta_2 = 0.0828, \gamma_2 = \beta_2/\beta^* - a_{\omega2}\kappa^2/\sqrt{\beta^*}$$

その他のモデル定数は以下の通りである。

$$a_1 = 0.31, \kappa = 0.41 \quad (6.21)$$

### 6.3 一般座標系における基礎方程式

曲面を持つ流れ場を計算する場合、前述のデカルト座標系で表記された基礎方程式では境界条件の取り扱いが困難となる。そこで、本研究では、基礎方程式をデカルト座標系から一般座標系に変換して数値解析を行う。一般座標系を $\xi$ 、 $\eta$ で表すと、式(6.2)は以下のように表される。

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial C} + \tilde{G} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta} + \tilde{T} \right) \quad (6.22)$$

ここで、保存量 $\tilde{Q}$ 、非粘性流束 $\tilde{E}$ 、 $\tilde{F}$ 、 $\tilde{G}$ は、



$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_r p \\ (e+p)U \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_r p \\ (e+p)V \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \frac{1}{J_r} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (e+p)v \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

となる. 上式において,  $J$  は変換ヤコビアン,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  は反変速度でそれぞれ以下のよ  
うに表される.

$$\frac{1}{J} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ r_\xi & r_\eta \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$U = \xi_x u + \xi_r v \quad (6.25)$$

$$V = \eta_x u + \eta_r v$$

また, 粘性流束  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{T}$  は以下のように表される.

$$\tilde{R} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_r \tau_{xr} \\ \xi_x \tau_{rx} + \xi_r \tau_{rr} \\ \xi_x \beta_1 + \xi_r \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{S} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_r \tau_{xr} \\ \eta_x \tau_{rx} + \eta_r \tau_{rr} \\ \eta_x \beta_1 + \eta_r \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T} = \frac{1}{J_r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xr} \\ t_1 \\ \tau_{rx} u + \tau_{rr} v + q_2 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

ここで,

$$\beta_1 = \tau_{rr} u + \tau_{rx} v + q_1 \quad (6.27)$$

$$\beta_2 = \tau_{xr} u + \tau_{rr} v + q_2$$

であり, 式(6.7)~(6.9)はそれぞれ以下のように変換される.

$$\tau_{xx} = \mu \left[ \frac{4}{3} (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) - \frac{2}{3} \left( \xi_x u_\xi + \eta_x v_\eta + \frac{v}{r} \right) \right] + \tau_{xx}^t \quad (6.28)$$

$$\tau_{rr} = \mu \left[ \frac{4}{3} (\xi_r v_\xi + \eta_r v_\eta) - \frac{2}{3} \left( \xi_x u_\xi + \eta_x v_\eta + \frac{v}{r} \right) \right] + \tau_{rr}^t$$

$$\tau_{xr} = \mu (\xi_r u_\xi + \eta_r u_\eta + \xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) + \tau_{xr}^t \quad (6.29)$$

$$q_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} \right) (\xi_x T_\xi + \eta_x T_{\eta\xi}) + q_1^t$$

$$q_2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} \right) (\xi_r T_\xi + \eta_r T_\eta) + q_2^t \quad (6.30)$$

ここで,

$$\tau_{xx}^t = \mu_t \left[ \frac{4}{3} (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) - \frac{2}{3} \left( \xi_r v_\xi + \eta_r v_\eta + \frac{v}{r} \right) \right] - \frac{2}{3} \text{Re } \rho k$$

$$\tau_{yy}^t = \mu_t \left[ \frac{4}{3} (\xi_r v_\xi + \eta_r v_\eta) - \frac{2}{3} \left( \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \frac{v}{r} \right) \right] - \frac{2}{3} \text{Re } \rho k \quad (6.31)$$

$$\tau_{xr}^t = \mu_t (\xi_r u_\xi + \eta_r u_\eta + \xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) \quad (6.32)$$

$$q_1^t = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) (\xi_x T_\xi + \eta_x T_{\eta\xi})$$

$$q_2^t = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) (\xi_r T_\xi + \eta_r T_\eta) \quad (6.33)$$

である。同様にして、 $k$ と $\omega$ の輸送方程式(6.13)を一般座標系で表すと、

$$\frac{\partial \tilde{Q}_t}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}_t}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_t}{\partial \eta} + \tilde{G}_t = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \tilde{R}_t}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{S}_t}{\partial \eta} + \tilde{T}_t + \tilde{P} + \tilde{\phi} + \tilde{B} \right) \quad (6.34)$$

となる。ここで、

$$\tilde{Q}_t = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho k \\ \rho \omega \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_t = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U k \\ \rho U \omega \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_t = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V k \\ \rho V \omega \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_t = \frac{1}{Jr} \begin{bmatrix} \rho v k \\ \rho v \omega \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_t &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} (\mu + \sigma_k \mu_t)(\xi_x k_\xi + \eta_x k_\eta) \\ (\mu + \sigma_\omega \mu_t)(\xi_x \omega_\xi + \eta_x \omega_\eta) \end{bmatrix} \\ \tilde{S}_t &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} (\mu + \sigma_k \mu_t)(\xi_r k_\xi + \eta_r k_\eta) \\ (\mu + \sigma_\omega \mu_t)(\xi_r \omega_\xi + \eta_r \omega_\eta) \end{bmatrix} \\ \tilde{T}_t &= \frac{1}{Jr} \begin{bmatrix} (\mu + \sigma_k \mu_t)(\xi_r k_\xi + \eta_r k_\eta) \\ (\mu + \sigma_\omega \mu_t)(\xi_r \omega_\xi + \eta_r \omega_\eta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\tilde{P} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \tilde{P}_k \\ \alpha \frac{\omega}{k} \tilde{P}_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{\phi} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} -\operatorname{Re} \beta^* \rho \omega k \\ -\operatorname{Re} \beta \rho \omega^2 \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

$$\tilde{B} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 2R_e(1-F_1)\sigma_{\omega^2} \frac{1}{\omega} [(\xi_x k_\xi + \eta_x k_\eta)(\xi_x \omega_\xi + \eta_x \omega_\eta) + (\xi_r k_\xi + \eta_r k_\eta)(\xi_r \omega_\xi + \eta_r \omega_\eta)] \end{bmatrix}$$

となる。なお、

$$\tilde{P}_k = \tau'_{xx}(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) + \tau'_{rr}(\xi_r v_\xi + \eta_r v_\eta) + \tau'_{xr}(\xi_r u_\xi + \eta_r u_\eta + \xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) \quad (6.38)$$

である。

#### 6.4 対流項の差分

本数値解析では、対流項の差分として空間3次精度 MUSCL 型の TVD 法を適用する。式(6.22)の対流項の微分はそれぞれ以下のように差分化される。

$$\left( \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} \right)_i = \frac{\tilde{E}_{i+1/2} - \tilde{E}_{i-1/2}}{\Delta \xi}, \quad \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} \right)_j = \frac{\tilde{F}_{j+1/2} - \tilde{F}_{j-1/2}}{\Delta \eta} \quad (6.39)$$

本数値解析では、上式において  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$  となるように式(6.24)の変換ヤコビアンを決定す

る. また, 添え字  $i+1/2$  や  $i-1/2$  は  $i$  番目のセルの境界を示す. セル境界の非粘性流束は Roe の流束差分法 (Flex Difference Splitting) により求める.

すなわち,  $\tilde{E}_{i+1/2}$ ,  $\tilde{F}_{i+1/2}$  は,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{i+1/2} &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{E}(\tilde{Q}_{i+1/2}^R) + \tilde{E}(\tilde{Q}_{i+1/2}^L) - |A|_{i+1/2}^1 (\tilde{Q}_{i+1/2}^R - \tilde{Q}_{i+1/2}^L) \right] \\ \tilde{F}_{i+1/2} &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{F}(\tilde{Q}_{i+1/2}^R) + \tilde{F}(\tilde{Q}_{i+1/2}^L) - |A|_{i+1/2}^2 (\tilde{Q}_{i+1/2}^R - \tilde{Q}_{i+1/2}^L) \right]\end{aligned}\tag{6.40}$$

で表される. ここで,  $A_{i+1/2}^m (m=1,2)$  は, 流束ヤコビアン行列  $A_{i+1/2}^m$  の固有値を行列要素を持つ対角行列  $A_{i+1/2}^m$ , 右固有行列  $R_{i+1/2}^m$ , 左固有行列  $L_{i+1/2}^m$  を用いて以下のように表される.

$$|A|_{i+1/2}^m = R_{i+1/2}^m |A_{i+1/2}^m| L_{i+1/2}^m (m=1,2)\tag{6.41}$$

$A_{i+1/2}^m$  の各要素は以下のようになる.

$$A_{i+1/2}^m = \begin{bmatrix} |\lambda - C| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\lambda - C| \end{bmatrix}\tag{6.42}$$

ここで,

$$\lambda = \kappa_t + \kappa_x \bar{u} + \kappa_y \bar{v}\tag{6.43}$$

$$C = c \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}\tag{6.44}$$

となる．なお，上式の  $\kappa$  は  $m=1, 2$  でそれぞれ  $\xi, \eta$  となる．また，固有行列  $R_{i+1/2}^m, L_{i+1/2}^m$  の各要素はそれぞれ以下のようになる．

$$R_{i+1/2}^m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \bar{u} - \bar{\kappa}_x c & \bar{u} & \bar{u} + \bar{\kappa}_x c & -\bar{\kappa}_y \\ \bar{v} - \bar{\kappa}_y c & \bar{v} & \bar{v} + \bar{\kappa}_y c & \bar{\kappa}_{yx} \\ \bar{H} - c\bar{\lambda} & \frac{1}{2}q^2 & \bar{H} + c\bar{\lambda} & -(\bar{\kappa}_y \bar{u} - \bar{\kappa}_x \bar{v}) \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

$$L_{i+1/2}^m = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( b_1 + \frac{\bar{\lambda}}{c} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\kappa}_x}{c} + b_2 \bar{u} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\kappa}_y}{c} + b_2 \bar{v} \right) & \frac{b_2}{2} \\ 1 - b_2 & b_2 \bar{u} & b_2 \bar{v} & -b_2 \\ \frac{1}{2} \left( b_1 - \frac{\bar{\lambda}}{c} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\kappa}_x}{c} + b_2 \bar{u} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\kappa}_x}{c} - b_2 \bar{v} \right) & \frac{b_2}{2} \\ \bar{\kappa}_y \bar{u} - \bar{\kappa}_x \bar{v} & -\bar{\kappa}_y & \bar{\kappa}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

ここで，

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_x &= \frac{\kappa_x}{\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}}, \bar{\kappa}_y = \frac{\kappa_y}{\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}} \\ \bar{\lambda} &= \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}}, b_1 = \frac{q^2}{2} \frac{\gamma - 1}{c^2}, b_2 = \frac{\gamma - 1}{c^2} \\ q^2 &= \bar{u}^2 + \bar{v}^2, \bar{H} = \frac{(\bar{e} + \bar{p})}{\bar{\rho}} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} q^2 \end{aligned} \quad (6.47)$$

である．式(6.43)～(6.47)中の各諸量は Roe の平均を用いて以下のように評価される．

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \sqrt{\rho_{i+1/2}^L \rho_{i+1/2}^R}, \bar{u} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1/2}^L} u_{i+1/2}^L + \sqrt{\rho_{i+1/2}^R} u_{i+1/2}^R}{\sqrt{\rho_{i+1/2}^L} + \sqrt{\rho_{i+1/2}^R}} \\ \bar{v} &= \frac{\sqrt{\rho_{i+1/2}^L} v_{i+1/2}^L + \sqrt{\rho_{i+1/2}^R} v_{i+1/2}^R}{\sqrt{\rho_{i+1/2}^L} + \sqrt{\rho_{i+1/2}^R}}, \bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1/2}^L} H_{i+1/2}^L + \sqrt{\rho_{i+1/2}^R} H_{i+1/2}^R}{\sqrt{\rho_{i+1/2}^L} + \sqrt{\rho_{i+1/2}^R}} \end{aligned} \quad (6.48)$$

また，式(6.40)，式(6.48)中の  $( )_{i+1/2}^R, ( )_{i+1/2}^L$  はそれぞれ計算セル界面の右および左の物理量で，以下の式で評価する．

$$\tilde{Q}_{i+1/2}^R = \tilde{Q}_i + \frac{S}{4} [(1 - \kappa S)\Delta_- + (1 + \kappa S)\Delta_+]_i \quad (6.49)$$

$$\tilde{Q}_{i+1/2}^L = \tilde{Q}_{i+1} - \frac{S}{4} [(1 - \kappa S)\Delta_+ + (1 + \kappa S)\Delta_-]_{i+1}$$

ここで,

$$\Delta_+ = \tilde{Q}_{i+1} - \tilde{Q}_i \quad (6.50)$$

$$\Delta_- = \tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{i-1}$$

また, 本研究では  $\kappa = 1/3$  で, この場合空間 3 次精度となる.  $S$  は Van Albada の制限関数で, 以下の式で表される.

$$s = \frac{2\Delta_+\Delta_- + \delta}{(\Delta_+)^2 + (\Delta_-)^2 + \delta} \quad (6.51)$$

$\delta$  は 0 でない小さな値であり, 本研究では  $10^{-6}$  とした.

## 6.5 粘性項の差分

粘性項内の物理量の微分は空間二次精度中心差分を用いて評価する. すなわち, 物理量  $A$  の  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  方向の一階微分は二次精度中心差分を用いると以下のように表される.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_i &= \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2\Delta\xi} = \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2} \\ \left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)_i &= \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2\Delta\eta} = \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2} \\ \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta}\right)_i &= \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2\Delta\zeta} = \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2} \end{aligned} \quad (6.52)$$

## 6.6 時間積分の評価

6.4, 6.5 節の手順により, 対流項, 粘性項の空間微分が求められ, 式 (6.22) は以下のように表すことができる.

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = H(\tilde{Q}) \quad (6.53)$$

本数値解析では、上式を 3 段階ルンゲ・クッタ法により積分し、各タイムステップの  $\tilde{Q}$  を求める。時刻  $t$  が  $t_n$  の時の物理量  $\tilde{Q}$  の値を上添え字<sup>(n)</sup>を用いて  $\tilde{Q}^{(n)}$  とすると、時刻  $t_{n+1}$  における物理量  $\tilde{Q}^{(n+1)}$  は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{(1)} &= Q^{(n)} + \frac{1}{3} \Delta t H(\tilde{Q}^{(n)}) \\ \tilde{Q}^{(2)} &= Q^{(n)} + \frac{1}{2} \Delta t H(\tilde{Q}^{(1)}) \\ \tilde{Q}^{(n+1)} &= Q^{(n)} + \Delta t H(\tilde{Q}^{(2)}) \end{aligned} \quad (6.54)$$

この手順により、 $t_n$  の時刻の諸量から  $t_{n+1}$  の時刻の諸量を求めることができる。

## 6.7 境界条件

本数値解析では、上流よどみ室、ノズルも含めた領域について数値解析を行う。各境界において以下の条件を適用した。

また、数値計算領域を図 6.1 と図 6.2 にそれぞれ示す。

- ・流入境界・・・圧力，密度，速度について一様流入条件
- ・噴流中心軸・・・圧力，密度，速度について軸対称条件(図 4.13)，対象条件(図 4.14)
- ・壁面・・・圧力，密度，速度についてすべりなし条件
- ・下流，上方境界・・・圧力，密度，速度について遠方条件 (0 勾配)

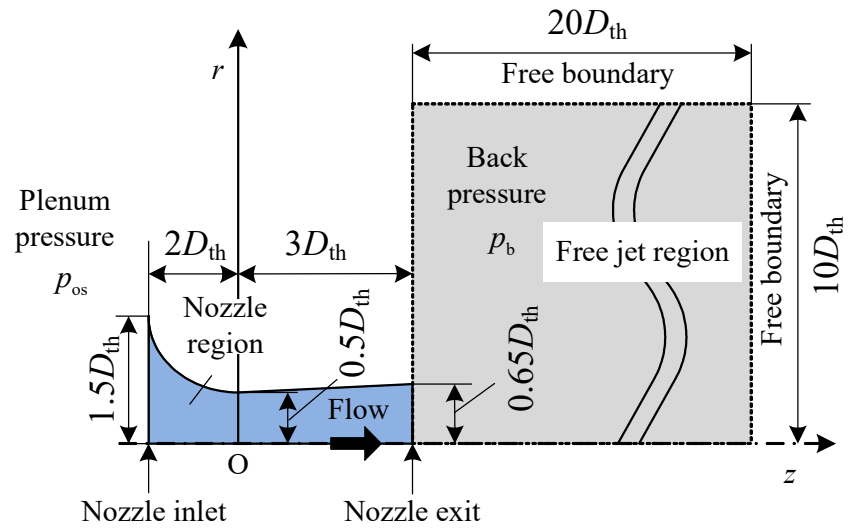


図 6.1 数値計算領域 (軸対称ノズル)

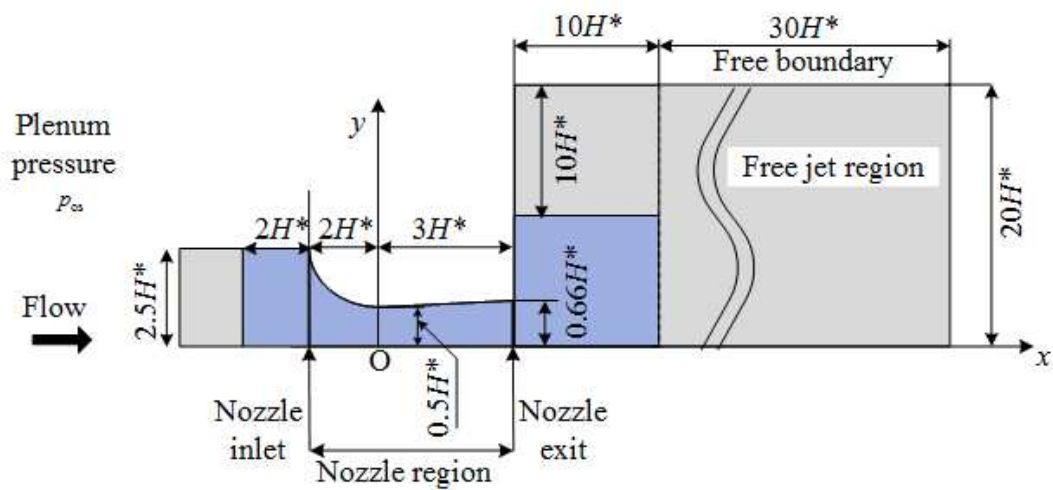


図 6.2 数値計算領域 (二次元ノズル)



## 第7章 臨界ノズルを通る低レイノルズ数流れの数値計算

本章では、トロイダルスロートベンチュリノズルを通る  $N_2$  ガス流れを数値計算を用いて軸対称的に解いた。7.1 節では、数値計算により得られた流出係数を過去の実験値と比較することで、数値計算の妥当性の検証を実施する。7.2 節では、ノズル内の圧力・マッハ数の数値計算結果について述べる。最後に、7.3 節で、本章のまとめについて述べる。

### 7.1 数値計算の妥当性検証結果

#### 7.1.1 流出係数の数値計算結果

理論レイノルズ数がベンチュリノズルの流れに与える影響について説明する前に、本数値計算結果の妥当性を検証した。図 7.1 に、理論レイノルズ数  $Re_{th}$  に対する、流出係数  $C_d$  の本数値計算結果と過去の実験データを示す。図 7.1 中に白丸と黒丸で示す記号は、それぞれ数値計算結果と実験結果を表している。実験データは、中尾らの論文<sup>[4]</sup>から引用しており、彼らが実験で使用したノズルは本数値計算と同じ形状である。図 7.1 の数値計算および実験結果は、十分に低い背圧であるため、ノズルの流れはチョークしている。

図 7.1 に示すように、理論的レイノルズ数  $Re_{th}=4000\sim 14000$  の範囲での流出係数  $C_d$  は、理論的レイノルズ数  $Re_{th} = 14000$  から緩やかな勾配で線形に減少し、 $Re_{th} = 4000$  未満のレイノルズ数では急激に低下している。中尾と高本<sup>[4]</sup>は、5 種類のトロイダルスロートベンチュリノズルを使用した実験調査の結果、境界層の層流から乱流への遷移が、 $Re_{th}\approx 600\sim 2500$  の区間で発生し、このときの流出係数  $C_d$  は、レイノルズ数の低下に合わせて著しく低くなることを明らかにしている。次節では、境界層の状態を層流と乱流の経験式を用いて推測する。

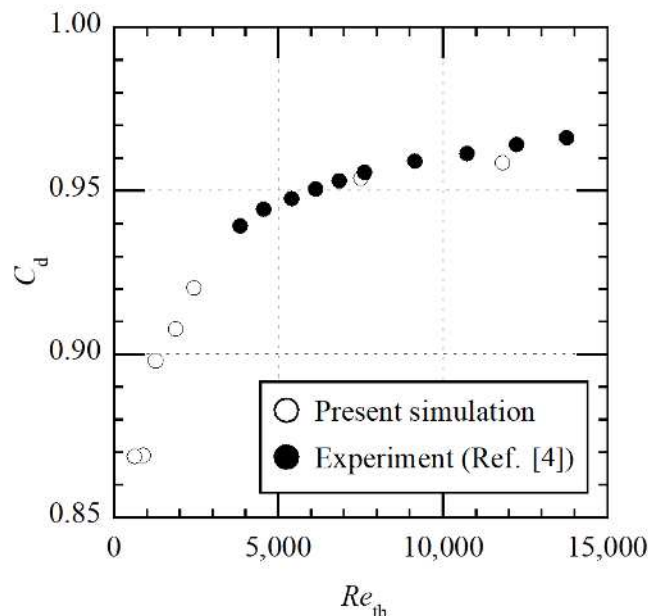


図 7.1 流出係数  $C_d$  の数値計算結果と実験結果との比較

### 7.1.2 境界層内の速度分布

図 7.2 に、理論レイノルズ数  $Re_{th} = 630$  で、背圧比  $p_b / p_{os} = 0.1$  における、ディフューザー内の  $z/D_{th}=1.0$  での壁境界層内の速度分布を示す。ここで、縦座標は壁面に対して垂直に測定された距離  $y$  であり、境界層の厚さ  $\delta$  で無次元化している。赤い線は本数値計算の境界層速度分布を示し、青と黒の線はそれぞれ層流と乱流の境界層の経験式である。本図から、本数値計算結果の速度分布は、層流境界層の近似解とよく一致していることがわかる。

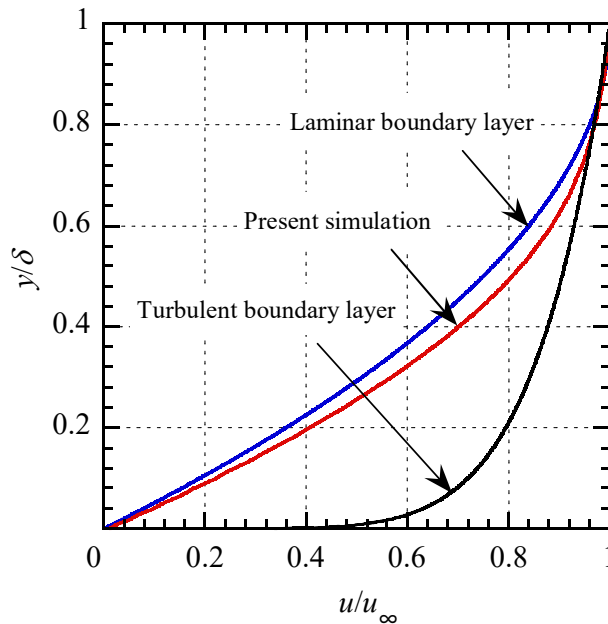


図 7.2  $z/D_{th}=1.0$  における境界層内の速度分布( $Re_{th}=630$ )

## 7.2 低レイノルズ数域におけるノズル内の流れ場

### 7.2.1 ノズル内の静圧分布

図 7.3, 図 7.4 に、理論レイノルズ数別の壁面および中心軸上の静圧分布を示す。本図の横軸は、ノズル軸に沿った無次元距離  $z/D_{th}$  で表される。右端に点 B をもつ破線は、ノズル内の流れが 1 次元等エントロピー的に膨張すると仮定することで計算される理論曲線である。つまり、点 B は本ノズルの設計条件であり、ノズル出口圧力は背圧と等しくなる。点 A の背圧は、ノズルの出口近傍で、垂直衝撃波が発生した場合の値を示している。したがって、点 A と点 B との間の背圧は、スロート下流において、ノズル全域流れが超音速となり、出口での静圧が背圧よりも低い状態であることを示している。ただし、実際のノズルでは、点 A と点 B との間の背圧下では、ノズル内部の衝撃波によって引き起こされる逆圧力勾配により、ノズル壁面の境界層がはく離し、ノズル出口で不均一な流れが生じる例<sup>[10,11]</sup>が報告されている。衝撃波による流れのはく離は、ノズルの性能に影響するだけでなく、ノズル自体に深刻な損傷を引き起こす可能性があることは広く認識されている。この問題は、これまで多くの研究者<sup>[8,9,10,11,18]</sup>によって議論されてきたが、流れ場構造の完全な理解は不

十分である。図 7.3 の  $Re_{th} = 630$  におけるノズル内の流れは、ノズルの内側と外側に衝撃波がなく、壁面と中心軸の間に圧力差がないことを示している。これは、流れがノズル内ではく離れたことを示している。一方、図 7.4 の  $Re_{th}=11820$  におけるノズル内の流れは、断面積一定の管内で発生する連続的な衝撃波または不足膨張状態の自由噴流内で発生するショックセル構造と同等の周期的な圧力波を示している。

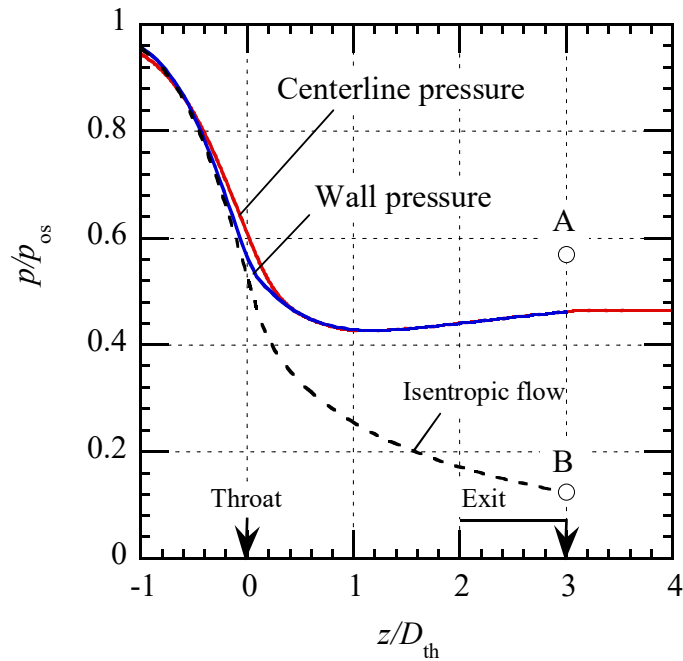


図 7.3 ノズル内の静圧分布( $Re_{th}=630$ )

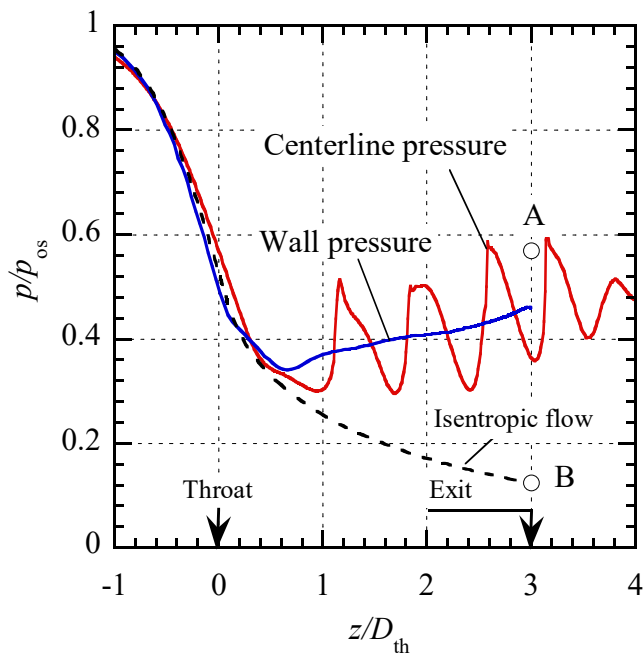


図 7.4 ノズル内の静圧分布( $Re_{th}=11820$ )

### 7.2.2 ノズル内のマッハ数分布

$Re_{th}=630$  および  $Re_{th}=11820$  における背圧比  $p_b/p_{os}=0.45$  での中心軸上のマッハ数分布を図 7.5 に示す. 本図の横軸  $z/D_{th}$  はノズルスロート直径  $D_{th}$  で無次元化された中心軸上の距離で, ノズル上流の圧力はそれぞれ  $Re_{th}=630$  のとき  $p_{os}=5.4\text{kPa}$ ,  $Re_{th} = 11820$  のとき  $p_{os}=12\text{kPa}$  である. 図 7.5 に示すように,  $Re_{th} = 630$  のマッハ数  $M$  は  $z/D_{th}\approx 1.0$  で最大値約 1.2 となり, ノズル出口にかけてマッハ数は一定のままである. また,  $Re_{th}=11820$  の流れ場では,  $Re_{th}=630$  の場合と同様,  $z/D_{th}\approx 1.0$  でマッハ数が最大 1.4 に達し, スロートの下流から 5 つの衝撃波からなるショック・トレインが形成されていることがわかる. 通常, 断面積一定の管内で発生する垂直衝撃波は, 衝撃波の直前の主流マッハ数が約 1.5 を超えると, ノズル壁面に沿って発達する境界層と相互作用することでショック・トレインを形成することが知られている<sup>[19]</sup>. それにもかかわらず, 図 7.5 では, 1.5 未満の主流マッハ数で連続した衝撃波が発生することを示している.

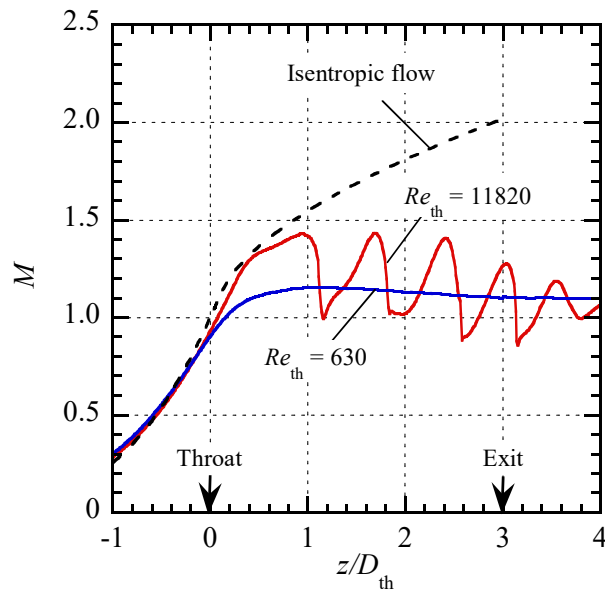
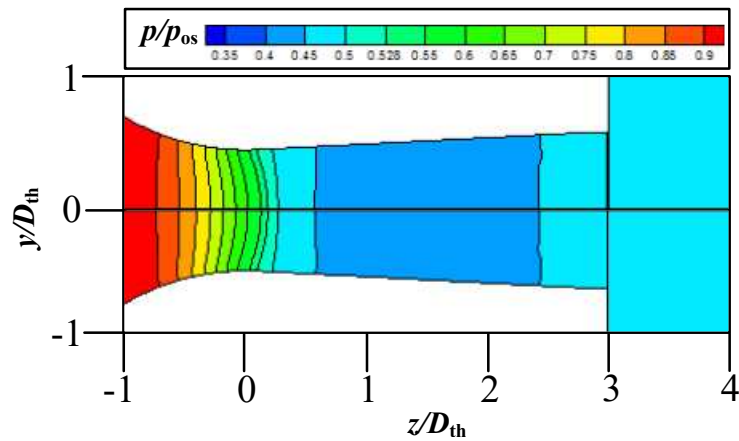


図 7.5 中心軸上のマッハ数分布

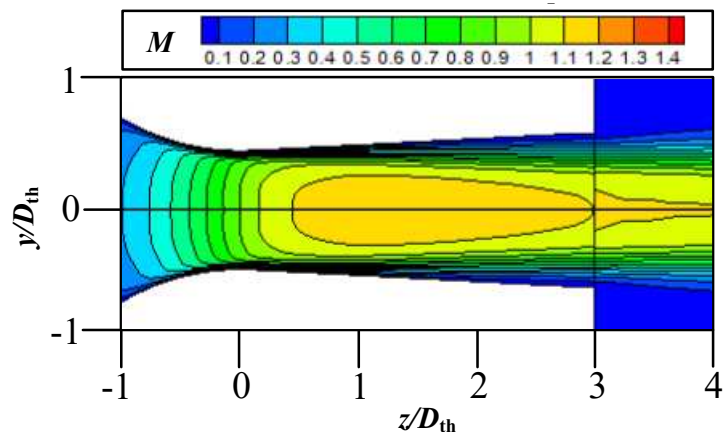
### 7.2.3 圧力・マッハ数コンター図

$Re_{th}=630$  および  $p_b/p_{os}=0.45$  , における圧力とマッハ数のコンター図を図 7.6 に示す. 同図において, ノズル上流の圧力は  $p_{os}=12\text{kPa}$  , またノズル下流の背圧は  $p_b=5.4\text{kPa}$  である. 圧力コンター図に注目すると, ノズル内の静圧分布は, スロート付近で壁の曲率による半径方向の圧力勾配がある領域を除いて, ノズル軸に垂直な圧力勾配は存在しないことがわかる. また, スロート下流のマッハ数分布は, ほぼ一定である.

$Re_{th}=11820$  および  $p_b/p_{os}=0.45$  の圧力とマッハ数のコンター図を図 7.7 に示す. ノズル上流の圧力は  $p_{os}=200\text{ kPa}$  , ノズル下流の背圧は  $p_b=90\text{kPa}$  である. 図 7.7 から, 垂直衝撃波がディフューザー壁面の境界層と相互作用することで, ショック・トレーンが形成されていることがわかる. また, 図 7.7 (b) から明らかなように, 境界層は,  $z/D_{th}=1.0$  前後の位置で壁面からはく離していることがわかる. これは, 衝撃波が発生することで, 境界層内の圧力分布が逆圧力勾配となるためである.



(a) 圧力コンター図



(b) マッハ数コンター図

図 7.6 圧力・マッハ数コンター図( $Re_{th}=630$ )

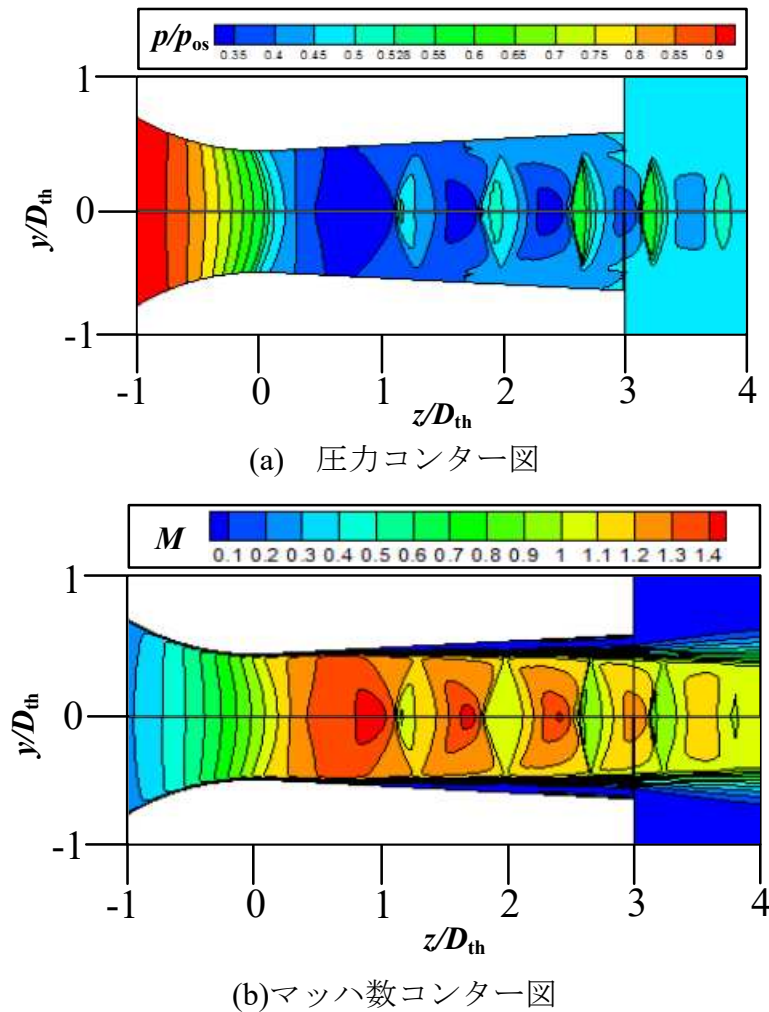


図 7.7 圧力・マッハ数コンター図( $Re_{th}=11820$ )

### 7.3 本章のまとめ

本章では、トロイダルスロートベンチュリノズルを通る窒素ガスの流れ場を  $k-\omega$  SST 乱流モデルを使用した RANS 方程式によって数値的に解いた。本数値計算は、ISO 9300 で推奨される下限値を下回る理論レイノルズ数の範囲で実施した。その結果、流出係数  $C_d$  は、 $Re_{th}=630\sim 4000$  にかけて急激に増加し、 $Re_{th}=4000\sim 14000$  の範囲にかけては、緩やかな勾配で直線的に増加することが明らかとなった。また、 $Re_{th}=630$  におけるノズル内の流れ場は、流れがノズル内ではなく離し、ノズル内部と外部で明確な衝撃波が発生しないことが明らかとなった。これは、ノズル壁面と中心線の間に圧力差がないことを示している。一方、 $Re_{th}=11820$  におけるノズル内の流れ場は、ショック・トレーンによって周期的な圧力波が発生することがわかった。

## 第 8 章 低レイノルズ数過膨張流れにおける衝撃波の特性

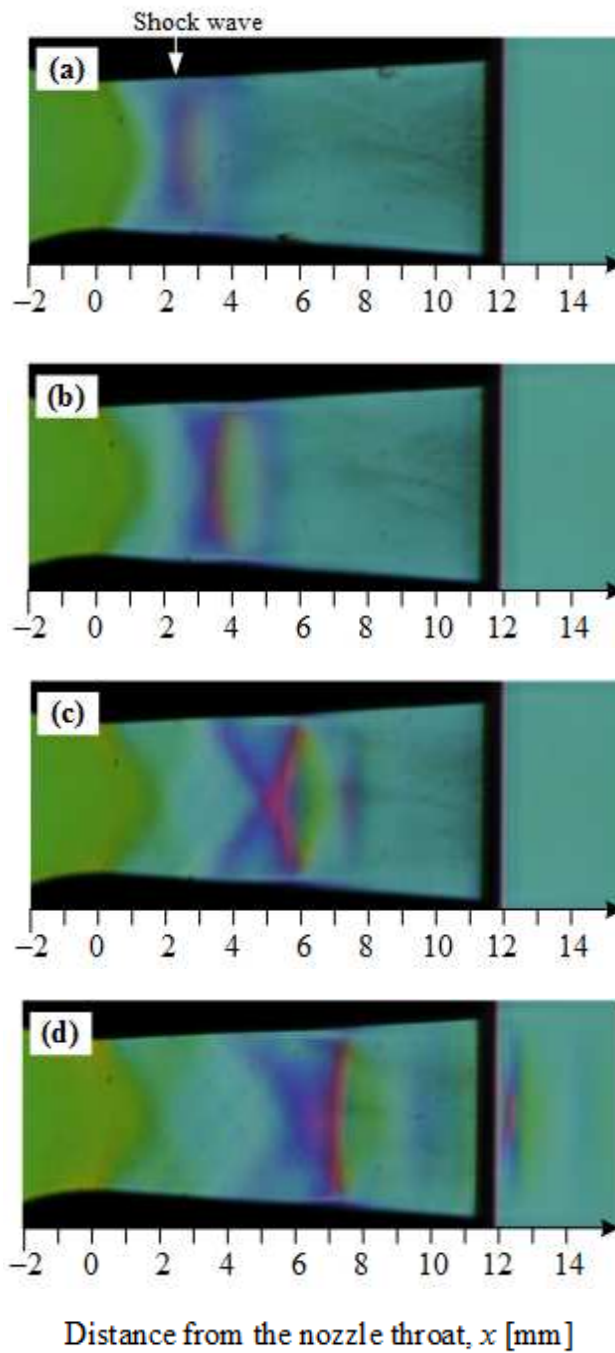
7 章にて臨界ノズルを通る低レイノルズ数流れを数値計算により調査した結果、過膨張流れにおいてノズル内に衝撃波が発生し、境界層と干渉することではく離を伴う流れとなることがわかった。そこで本章では、二次元ベンチュリノズルを通る低レイノルズ数過膨張流れの衝撃波特性について、光学的可視化により実験的な調査を実施する。8.1 節では、レインボーシュリーレン写真から衝撃波のはく離圧力比を導出し、Arens らの理論<sup>[8,9]</sup>と比較する。8.2 節では、レーザーシュリーレン法とマッハ・ツェンダー干渉計により得られた写真を解析し、低レイノルズ数流れの非定常性について調査した結果を示す。8.3 節では、本章のまとめについて述べる。

### 8.1 レインボーシュリーレン法による実験結果

#### 8.1.1 レインボーシュリーレン写真

図 8.1 に二次元ベンチュリノズル内の過膨張流れを撮影したレインボーシュリーレン写真を示す。流れは図 8.1 の左から右に沿っており、本レインボーシュリーレン写真は、レインボーフィルターを衝撃波の形状を観察するため、レインボーフィルターを垂直に設置している。また、本実験では、よどみ室内の圧力  $p_{os}$  に対する背圧  $p_b$  との背圧比  $p_b/p_{os}$  を  $p_b/p_{os}=0.65$  から  $0.50$  にかけて、 $0.05$  ずつ変化させて計 4 枚の写真を撮影している。

一次元等エントロピー理論に拠ると、過膨張流れに於いてノズル内に衝撃波は発生しないことが一般的に広く知られている。しかし、図 8.1 (a)から明らかなように、ノズルスロートの下流付近で垂直衝撃波が発生していることを確認することができる。また、背圧比が下がるにつれて、ノズル内の衝撃波はノズル出口に向かって移動している。更に衝撃波の構造に注目すると、背圧比が減少するにつれ、垂直衝撃波から X 型のショック・トレーン構造へと変化していることが観察できる。これはノズル壁面付近に於いて、衝撃波がノズル壁面近傍に於いて境界層と干渉しすることで、はく離を発生させ、その度合いが背圧比が減少するにつれ強まることを示している。



(a)  $p_b/p_{os} = 0.65$ , (b)  $p_b/p_{os} = 0.60$ , (c)  $p_b/p_{os} = 0.55$ , (d)  $p_b/p_{os} = 0.50$

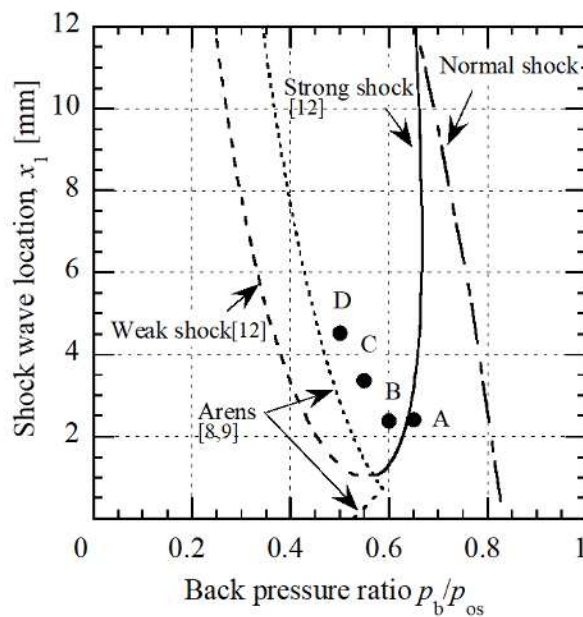
図 8.1 レインボーシュリーレン写真



### 8.1.2 はく離圧力比の理論曲線との比較

衝撃波による境界層のはく離を確認するため、図 8.1 のレインボーシュリーレン写真から衝撃波のはく離圧力比を導出し、理論曲線と比較した結果を図 8.2 に示す。図 8.2 の縦軸  $x_1$  はスロートを原点としたノズル中心軸上からの距離、横軸  $p_b/p_{os}$  は実験時の背圧比をそれぞれ示している。ここで、ノズルスロートからの距離  $x_1$  は、スロートからノズル壁面近傍に発生する第 1 衝撃波までの距離を図 8.1 のレインボーシュリーレン写真から測定することで導出している。壁面近傍の第 1 衝撃波の位置は、図 8.1 で使用したレインボーフィルターの背景色相から最も離れた色相となっている箇所から決定している。これは衝撃波前後に於いて密度勾配が大きくなるという特徴をレインボーフィルターの背景色相からの移動量によって定量的に評価することができるためである。

図 8.2 の一点鎖線は、ランキン・ユゴニオの式から導かれる理論値であり、垂直衝撃波の発生位置を示している。ここで、ノズル出口とスロートにおける背圧比はそれぞれ 0.654 と 0.837 である。破線と実線は弱い衝撃波と強い衝撃波の解<sup>[12]</sup>を示している。これは、はく離による流れの偏向角とノズルの半角度とが等しく、衝撃波後の静圧  $p_s$  が背圧  $p_b$  と等しくなるという過程に基づいている。更に図 8.2 中の点線は、Arens と Spiegler によって提唱された理論曲線<sup>[8,9]</sup>である。図中の A から D は、図 8.1 の(a)から(d)にそれぞれ対応している。



8.2 背圧比別の衝撃波発生位置

図 8.2 から、図中の A, B は強い衝撃波の理論値と良く一致していることがわかる。一方で、図中の C, D に注目すると、実験値と一致する理論値は存在しない。これは、境界層の状態に依るものと考えられる。Arens と Spiegler の提唱した乱流境界層のはく離予測式は、実験値と極めて良い一致を示すことが知られている。しかしこの理論は、はく離が乱流境界層の特性速度を淀ませるほど十分な圧力比である時に発生するという過程に基づき導出されたもので、従来の研究と比較すると、本実験時のレイノルズ数は極めて小さい。したがって、Arens と Spiegler の理論曲線と本実験結果との差異は、境界層内の速度分布に依るものと考えられる。

### 8.1.3 はく離圧力比とはく離マッハ数との関係

はく離圧力比  $p_1/p_s$  とはく離マッハ数  $M_{1e}$  との関係を図 8.3 に示す。 $M_{1e}$  は、衝撃波の位置  $x_1$  にかけて、流れが等エントロピー的に膨張されると仮定したものであり、 $p_1$  は  $x_1$  における静圧、 $p_s$  ははく離による圧縮後の静圧をそれぞれ示している。実験結果から  $p_s$  を得ることは困難であるため、本実験では Arens らの仮説<sup>[8,9]</sup>に基づき、 $p_s$  が背圧  $p_b$  に等しいと仮定している。図 8.2 と図 8.3 で示した Arens らの理論式は、ロケットエンジンの研究分野で、ディフューザ角度が一定の超音速ノズルについて、境界層のはく離位置を正確に予測するため使用されてきたものである。彼らの理論に拠れば、 $p_s$  はノズル下流の背圧  $p_b$  と等しいから、はく離後に圧力は回復しない。また、本実験で  $p_s$  は直接的に得ることはできなかったが、 $p_s/p_1, p_1/p_s$  は衝撃波の位置が既知であるため、衝撃波直前の自由噴流のマッハ数から求めている。

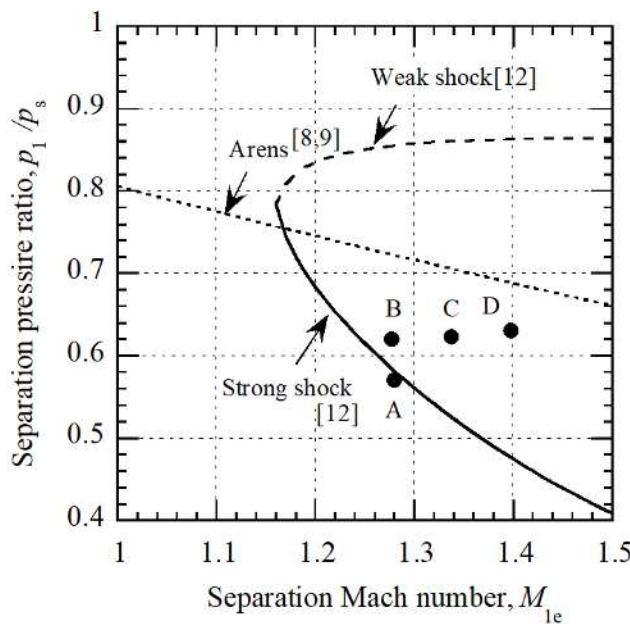


図 8.3 はく離圧力比

図 8.3 から，点 A と点 B では，衝撃波と境界層の干渉によるものでなく，衝撃波による逆圧力勾配がはく離を引き起こしたとみなすことができる．衝撃波の強さはマッハ数のみの関数であるため，この場合のはく離は，衝撃波上流の主流マッハ数にのみ依存する．一方，点 C と点 D におけるはく離は，垂直衝撃波と境界層との干渉によって，ショック・トレーンが発生したと考えられる．ショック・トレーンによるはく離圧力比ははく離マッハ数には関係なく一定である．これまでの多くの実験結果では，ショック・トレーンは断面積一定の管内において，主流マッハ数が約 1.5 の状態で発生しているが，本実験結果では，主流マッハ数が 1.5 よりも小さい状態でショック・トレーンが確認できる．これは，従来の研究と比較して，本実験がより低いレイノルズ数で行われたため，つまり，衝撃波の位置で境界層内の速度分布が遅いためと推察されるが原因究明には更なる調査が必要である．

## 8.2 レーザーシュリーレン法とマッハ・ツェンダー干渉計による実験結果

### 8.2.1 レーザーシュリーレン写真

背圧比  $p_b/p_{os}=0.65$  におけるレーザーシュリーレン写真を図 8.4 に示す．本図の流れ方向に対する空間分解能は  $0.04\text{mm}$  である．通常，本ノズルにおいて  $p_b/p_{os}=0.65$  は過膨張流れであるため，ノズル内に衝撃波は存在しない．しかし，図 8.4 では垂直衝撃波に極めて近い形状の衝撃波がスロートの下流近傍で発生していることが確認できる．本実験では，撮影した計 2000 枚のレーザーシュリーレン写真の大半で衝撃波を観察することができた．

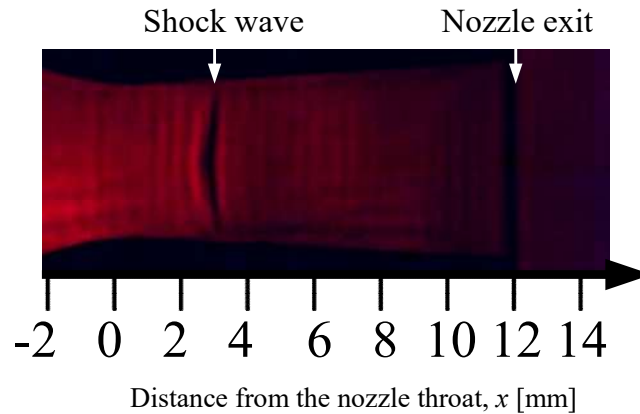


図 8.4  $p_b/p_{os} = 0.65$  のレーザーシュリーレン写真

$p_b/p_{os} = 0.65$  における衝撃波位置の時刻歴を図 8.5 に示す．レーザーシュリーレン写真の光強度は、流れの密度勾配に正比例する．よって，本実験のレーザーシュリーレン写真では、密度勾配の増加を光強度の低下，密度勾配の低下をその逆として捉えることができる．言い換えると、流れ場に存在する衝撃波は、光強度の急激な増加と大きな低下として観察される．このように，流れ場の光強度の変化から，衝撃波振動の時刻歴を取得することができる． $x_s = 0$  は，ノズル内における衝撃波振動の時間平均位置を示している．衝撃波の時間平均位置の原点は， $x = 3.17 \text{ mm}$  の位置と等しい．衝撃波は，時間平均位置で振動している．

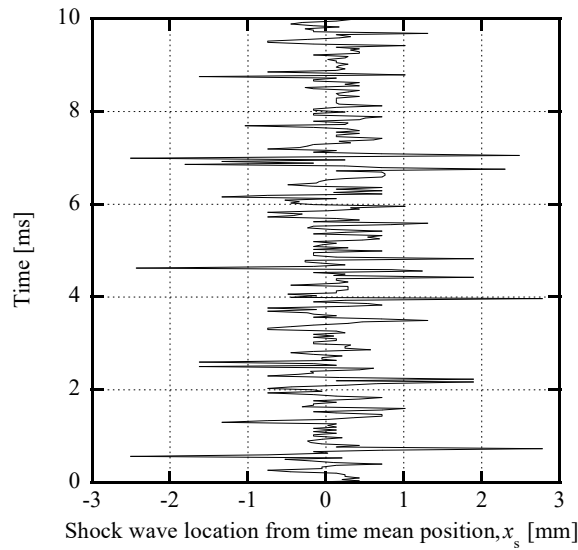


図 8.5 衝撃波位置の時刻歴

図 8.5 の実験データから計算した衝撃波変位のパワースペクトル密度分布 (PSD) を図 8.6 に示す. PSD の曲線の下領域は, ノズル中心線に沿った衝撃変位の分散と等しい.

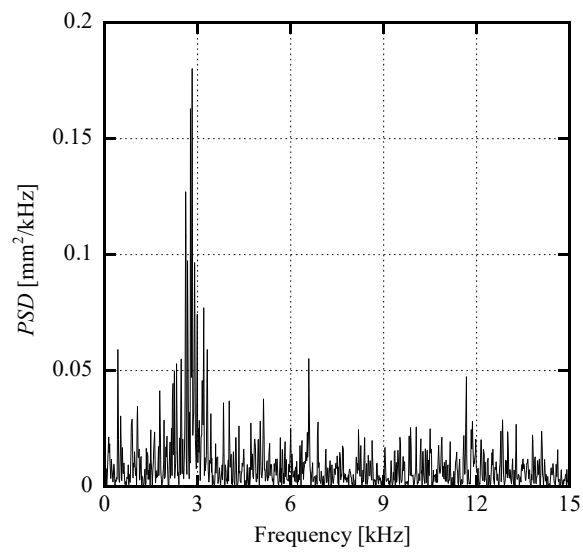
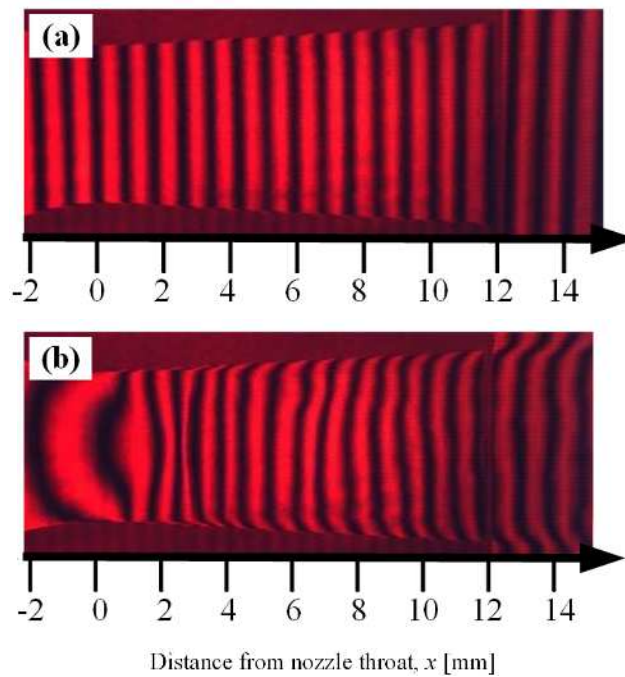


図 8.6 衝撃波変位のパワースペクトル密度分布

### 8.2.2 マッハ・ツェンダー干渉縞写真

$p_b / p_{os} = 1.0$ (背景画像), および  $p_b / p_{os} = 0.65$  における, ノズル流れのマッハ・ツェンダー干渉縞写真を図 8.7(a)および(b)にそれぞれ示す. 図 8.7 (a)では, 均一な明るさの画像であることがわかるが, 図 8.7(b)では, 衝撃波と上下の壁面近傍の縞が顕著に歪んでいることがわかる. 移動縞法では, 移動縞が密度のみに依存することが広く知られている. したがって, 図 8.7 の時刻歴から得られた移動縞を 5.3.4 節にて説明した手法で解析することにより, 2次元密度場を計算することができる.



(a)  $p_b/p_{os} = 1.0$  (背景写真), (b)  $p_b/p_{os} = 0.65$

図 8.7 干渉縞写真

図 8.7 の干渉縞移動量を計算することで得られたパワースペクトル密度分布(PSD)を図 8.8 に示す. 図 8.8 から, 支配周波数は 3kHz であり, レーザーシュリーレン写真から得られた図 8.6 の支配周波数と定量的によく一致していることがわかる. フォン・ラバンテら<sup>[6]</sup>は, レイノルズ数  $1.0 \times 10^5$  の臨界式ベンチュリノズル流れの非定常性を数値的に解いた結果, ノズル出口での下流の圧力変動がスロートを超え, 上流に伝播するというを示した. その結果, ノズル内で定期的にチョークが崩れることにより, 質量流量の断続的な減少が発生することが明らかとなった. 図 8.6 および図 8.8 から明らかのように, 衝撃波が 3kHz の支配的な周波数で平均位置を横切って振動することを本研究によって示すことができた.

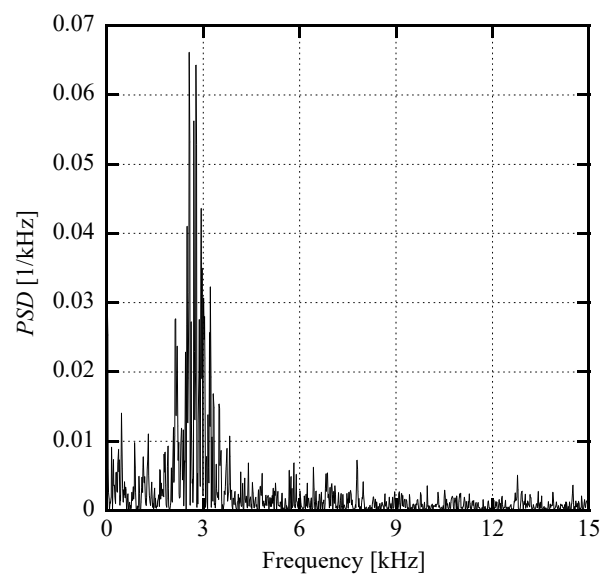


図 8.8 衝撃波位置のパワースペクトル密度分布

### 8.3 本章のまとめ

本章では、二次元ベンチュリノズルを通る低レイノルズ数での過膨張流れをレインボーシュリーレン法により、光学的に可視化した。実験により得られたレインボーシュリーレン写真から、衝撃波がノズルスロートの下流近傍で発生し、その位置は背圧比が減少するにしたがって、徐々に下流方向へ移動することがわかった。更に衝撃波の構造に注目すると、その形状は背圧比の減少に従い、垂直衝撃波からショック・トレーンへと徐々に変化することがわかった。また、垂直衝撃波のはく離圧力比は、強い斜め衝撃波に対する理論解と良い一致を示した一方、ショック・トレーンのはく離圧力比は理論値との一致は見られず、背圧比が変化しても一定値を示した。

また、低レイノルズ数での二次元ベンチュリノズル内部の流れを、レーザーシュリーレン法とマッハ・ツェンダー干渉計にそれぞれ高速度デジタルカメラを組み合わせることで、光学的に可視化し衝撃波の特性を調査した。その結果、マッハ・ツェンダー干渉計で二次元ベンチュリノズル内部での衝撃波振動を撮影することに初めて成功した。また、実験結果を解析したところ、垂直衝撃波がノズルスロート付近において、レイノルズ数  $7.5 \times 10^4$  で約 3 kHz の支配周波数で振動することが明らかとなった。本研究結果から、低レイノルズ数過膨張流れにおける 2 つの特性が得られた。

第一に、ノズル内で垂直衝撃波が過膨張流れにおいて発生し、約 3kHz の支配周波数で振動することである。第二に、主流マッハ数 1.5 未満でショック・トレーンが発生することである。これは、ショック・トレーンに関する従来の研究<sup>[19]</sup>と比較して、より低いレイノルズ数の影響と考えられる。この結果は、衝撃波の発生位置において、境界層内速度分布が小さいためと推測される。ショック・トレーンは、衝撃波と境界層との干渉により説明することができる。しかし、低レイノルズ数での衝撃波の周期的振動のメカニズムを明らかにするには、詳細な研究が必要である。本研究結果は、低レイノルズ数域における臨界ノズル流れの数値計算結果を検証するための信頼できる実験データとなるであろう。さらに、この研究結果から、マッハ・ツェンダー干渉法による非定常流れ場での二次元測定の実証することができた。



## 第9章 低レイノルズ数過膨張流れの衝撃波による境界層のはく離

本章では二次元ベンチュリノズルを通る低レイノルズ数過膨張流れについて、衝撃波による境界層のはく離に着目し調査を実施する。まず、壁面静圧測定とレインボーシュリーレン写真の密度場の定量化によりノズル内の流れ場を実験的に測定した。さらに、同条件化で数値計算を実施することで、低レイノルズ数域の衝撃波によるはく離を伴う流れ場について評価した。9.1節では、実験結果と数値計算結果を比較し、数値計算の妥当性を評価したので、その結果について述べる。9.2節では、ノズル内で発生する衝撃波構造を4つのレイノルズ数別に数値計算した結果について述べる。9.3節では、本章の実験結果と数値計算結果で確認することができたはく離を過去の理論曲線と比較したので、その結果について述べる。最後に9.4節では、本章のまとめを述べる。

### 9.1 数値計算結果の妥当性検証

#### 9.1.1 レインボーシュリーレン写真

過膨張流れにおけるレインボーシュリーレン写真を図9.1に示す。流れ方向は、紙面左から右に流れており、衝撃波の形状を捉えるため、レインボーフィルターの設定方向は流れに対して垂直に設定している。よどみ圧力 $p_{os}$ に対する背圧 $p_b$  ( $p_b$ は大気圧と同じ値)との背圧比 $p_b/p_{os}$ は、0.05刻みで $p_b/p_{os}=0.65$ から0.30に減少させている。1次元等エントロピー理論に基づくと、過膨張流れでは垂直衝撃波を除き、ノズル内で衝撃波は発生しない。しかし、 $p_b/p_{os}=0.5$ の図9.1(a)から明らかのように、 $\lambda$ 型の衝撃波がノズル内部で発生し、垂直衝撃波がノズル出口のすぐ下流で発生していることがわかる。 $p_b/p_{os}=0.4$ の図9.1(b)に示すように、よどみ圧力を上げることでノズル出口の外側まで衝撃が押し出され、衝撃波の構造が $\lambda$ 型から垂直衝撃波へ徐々に変化することがわかる。

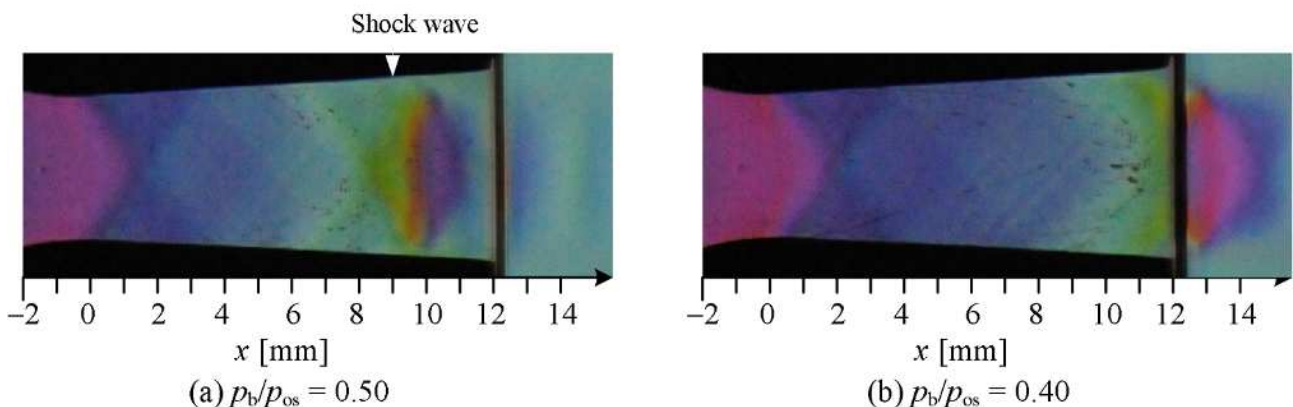


図9.1 レインボーシュリーレン写真

### 9.1.2 二次元ベンチュリノズル内の数値計算結果

二次元ベンチュリノズルを通る流れ場の数値計算結果を図 9.2 に示す。流れ方向は左から右へ流れており、 $x$  方向の密度勾配をグレースケールで表示している。図 9.2 の計算は、図 9.1(a)に示した実験条件と同様である。図 9.2 から実験結果と同様、2つの衝撃波がノズル内で発生していることがわかる。第一衝撃波は  $x \approx 9\text{mm}$  に存在し、入側の斜め衝撃波、垂直衝撃波、および出側の斜め衝撃波の3つで構成されている。第二衝撃波は、ノズル出口の上流近傍で発生している。数値計算と実験を比較すると、衝撃波の形状と位置は、定性的に良く一致していることがわかる。

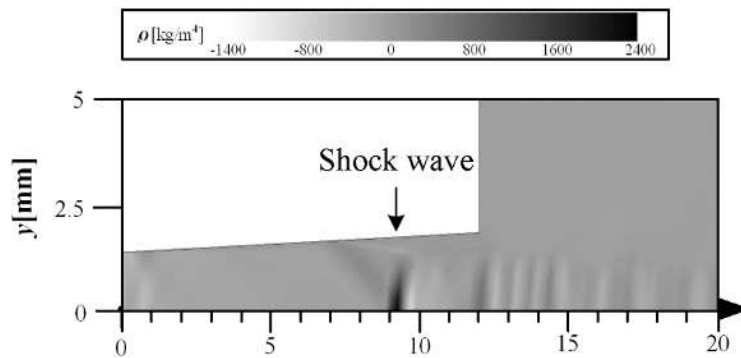


図 9.2 数値計算結果( $p_b/p_{os} = 0.5$ )

### 9.1.3 壁面静圧分布

本数値計算結果の検証をノズル壁面の圧力分布と比較することで実施する。ベンチュリノズルの壁面静圧測定結果を図 9.3 に示す。

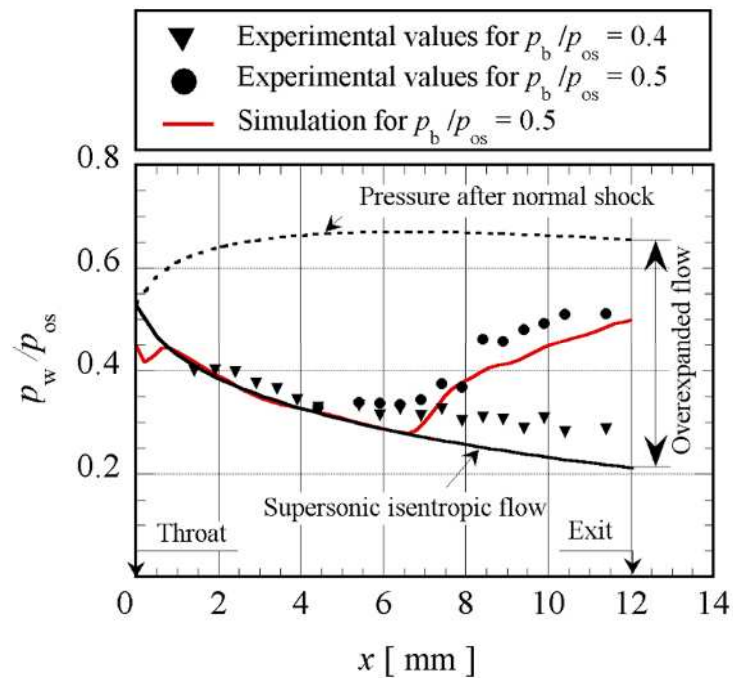


図 9.3 ノズル壁面静圧分布

図 9.3 の縦軸はノズル内の壁面静圧  $p_w$  の測定値とノズル上流のよどみ圧（大気圧） $p_{os}$  の比  $p_w/p_{os}$  であり，横軸はノズルスロートからの距離  $x$  である．本実験により得られた測定値のうち， $p_b/p_{os}=0.4, 0.5$  における測定結果をそれぞれ  $\blacktriangledown, \bullet$  で示す．また，同図の赤線は， $p_b/p_{os}=0.5$  における数値計算結果を示す．さらに，ノズル内に垂直衝撃波が発生した場合の圧力上昇値を破線で，本ノズルの適正膨張下における圧力値を実線で示す．

図 9.3 より，圧力比  $p_b/p_{os}=0.5$  における実験値は，同圧力比における数値計算結果と比較して定量的に良く一致する．

#### 9.1.4 ノズル中心軸上の密度分布

図 9.1 (a) のレインボーシュリーレン写真から，レインボーフィルターの検定曲線を使用して，ノズル中心軸上の密度分布を取得した．実験結果を図 9.4 中の青線で示す．また，図中の赤線は数値計算結果，黒線はノズル内の流れを一次元等エントロピー流れと仮定した理論値をそれぞれ示す．

図 9.4 から，レインボーシュリーレン写真により得られた密度分布は，数値計算結果と非常に良く一致していることがわかる．

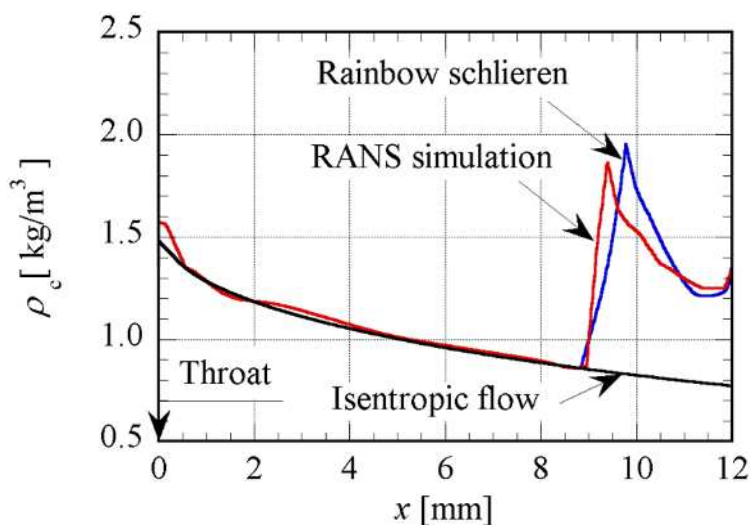


図 9.4 ノズル中心軸上の密度分布

## 9.2 レイノルズ数が及ぼすノズル内部衝撃波構造への影響

### 9.2.1 レイノルズ数別のマッハ数分布

数値計算により得られた、圧力比  $p_b/p_{os}=0.5$  におけるマッハ数のコンター図を図 9.5 に、ノズル中心軸上のマッハ数分布を図 9.6 にそれぞれ示す。図中の  $Re^*$  は、スロート直径を代表長さとしたレイノルズ数であり、 $Re^*=1.2 \times 10^4 - 1.2 \times 10^7$  にかけて 4 つの  $Re^*$  に対しての計算結果を示している。また、図 9.5(b) は、先述の図 9.2 と同じ流れ場である。

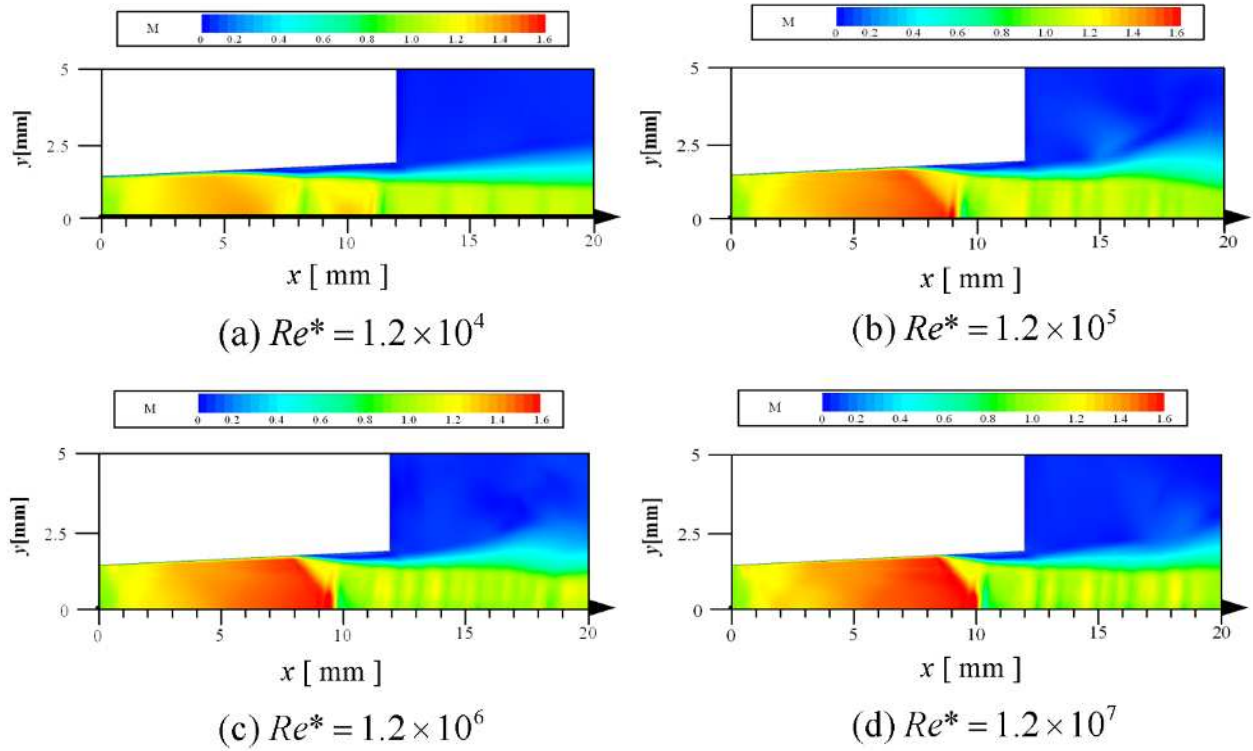


図 9.5 ノズル内のマッハ数コンター図( $p_b/p_{os} = 0.5$ )

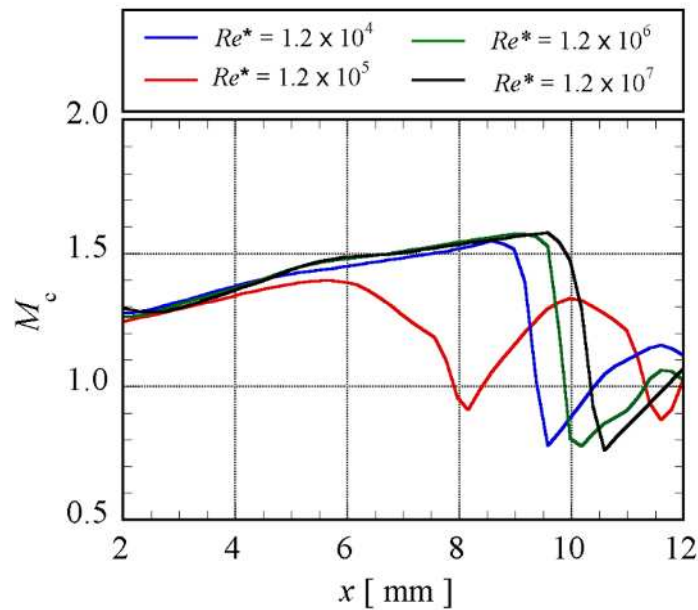


図 9.6 中心軸上のマッハ数分布

図 9.6 (b)~(d)より，境界層のはく離を伴うλ型の衝撃波構造を観察することができる．また，はく離は流れ方向下流の自由噴流まで続いていることがわかる．この境界層はく離は，図 9.6 (a)~(d) 全てのレイノルズ数に対して観察することができる．

$Re^*=1.2 \times 10^7$ に注目すると，主流マッハ数は，衝撃波直前の  $x=10\text{mm}$  付近にかけて，徐々に増加し，衝撃波通過後，マッハ数が約 0.8 に急激に低下していることがわかる．また，ノズル内に発生する衝撃波位置は，レイノルズ数  $Re^*$ が増加するにつれ，流れ方向下流へと移動している．更に，レイノルズ数が最も低い  $Re^*=1.2 \times 10^4$ では，他の3つのレイノルズ数と比較して，マッハ数分布が異なっていることがわかる．

### 9.2.2 レイノルズ数別の静圧分布

数値計算により得られた，圧力比  $p_b/p_{os}=0.5$ における圧力コンターを図 9.7 に，ノズル中心軸上の静圧分布を図 9.8 にそれぞれ示す．

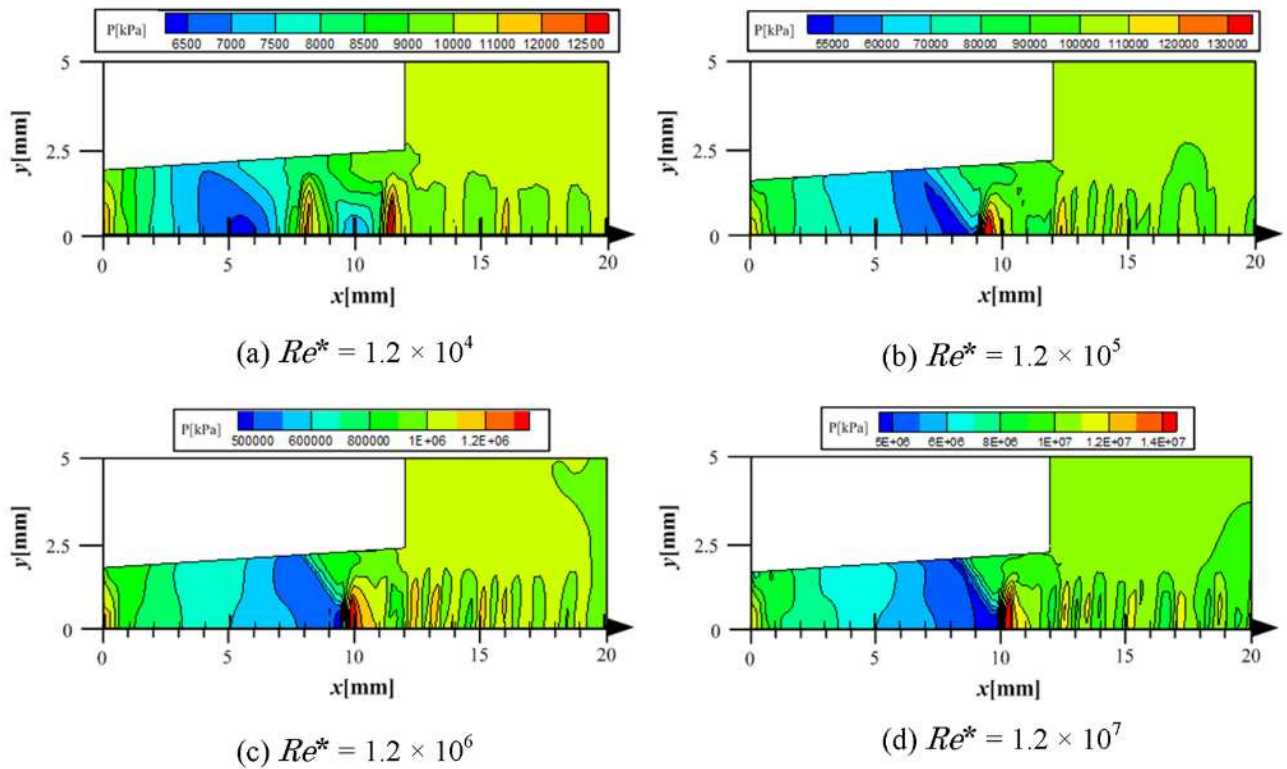


図 9.7 ノズル内の静圧コンター図( $p_b/p_{os} = 0.5$ )

図 9.7 (d)より,  $Re^*=1.2 \times 10^7$ において, ノズル出口上流の $\lambda$ 型の衝撃波がショック・セル構造を形成し, 自由噴流部まで続く様子を確認することができる. また, 図 9.7 と図 9.8 から明らかなように, レイノルズ数  $Re^*$ が減少するにしたがって, 衝撃波は上流方向へ移動する. 図 9.7 (a)と, 図 9.8 の  $Re^*=1.0 \times 10^4$ に注目するとノズル内部に2つの衝撃波が確認できるが, その他のレイノルズ数における圧力分布と比較して, ゆるやかに圧力上昇していることがわかる.

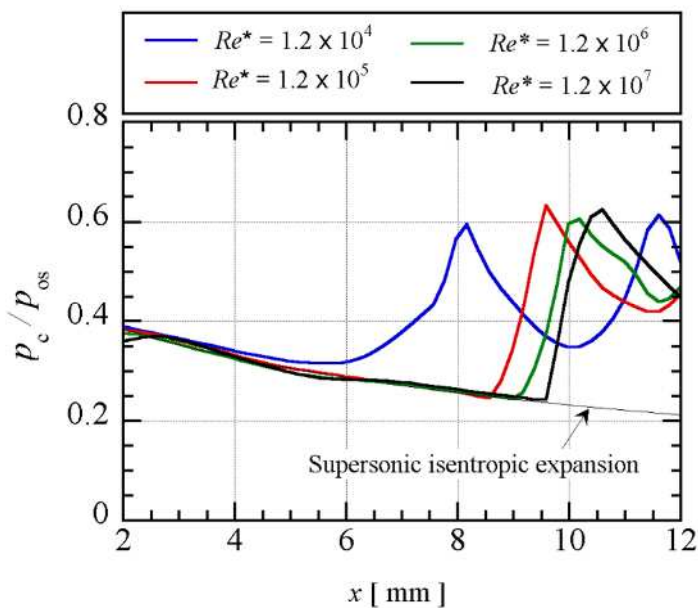


図 9.8 中心軸上の静圧分布

### 9.3 衝撃波が誘発する境界層のはく離

高レイノルズ数域における、衝撃波と境界層の干渉に関するこれまでの研究<sup>[8,9]</sup>から、干渉開始点付近からはく離点にかけての圧力上昇は、干渉の幾何形状とは無関係であり、干渉開始点における主流マッハ数に依存するということが明らかとなっている。この節では、低レイノルズ数域におけるはく離圧力比と高レイノルズ数流れに適用される過去の理論との比較を行う。

#### 9.3.1 低レイノルズ数流れにおけるノズル壁面の圧力分布

4つの異なるレイノルズ数流れについて、ノズル壁面の静圧分布を図9.9に示す。図9.9中の記号□と○は干渉点と境界層はく離点付近の圧力値である。境界層のはく離は、過去の研究と同様、すべてのレイノルズ数について、壁面圧力の変曲点において発生する。干渉点とはく離点との間の圧力勾配は、レイノルズ数が増加するにつれ大きくなっていることがわかる。

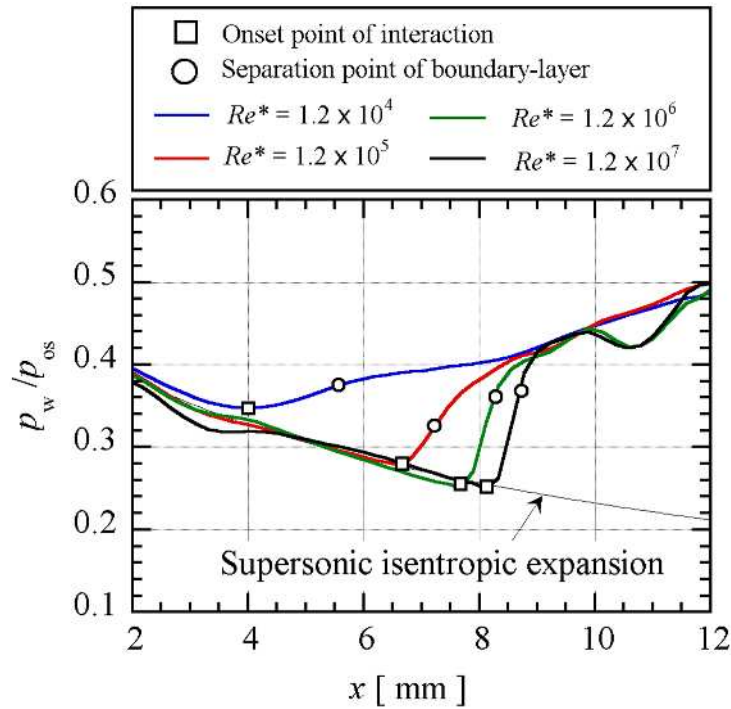
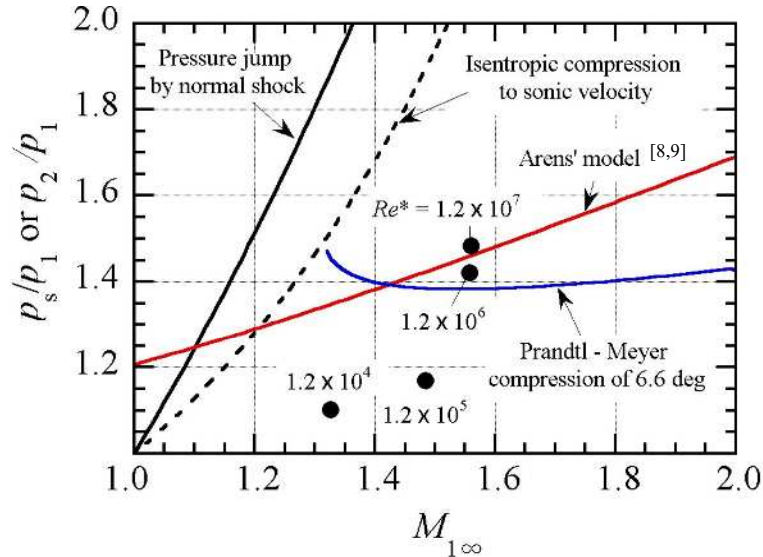


図 9.9 レイノルズ数別の壁面静圧分布

### 9.3.2 衝撃波-境界層はく離による圧力上昇

図 9.10 に、衝撃波と境界層の干渉点付近の主流マッハ数  $M_{1\infty}$  と、境界層のはく離によって発生する圧力上昇値  $p_s/p_1$  との関係を示す。同図中には、過去の理論曲線と実験値を示しており、本実験データを図中の黒点で表示している。ここで、 $p_1$  は、干渉点付近の圧力上昇開始点、 $p_s$  ははく離点における圧力値をそれぞれ示している。



9.10 はく離圧力比と干渉開始点におけるマッハ数との関係

はく離点は、数値計算から、壁面付近の速度コンター図を読み取ることにより算出した。また、図中の青線はプラントル-マイヤー圧縮波により  $6.6^\circ$  傾けられた連続的な流れと仮定した際に得られるもので、赤線は Arens の理論式<sup>[8,9]</sup>により得られる曲線で以下の式で示される。

$$p_s/p_1 = \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{1\infty}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{1\infty}^2 \left[ 1 - \left( \frac{u_1^i}{u_{1\infty}} \right)^2 \right]} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (9.1)$$

また、同図の黒線はランキン・ユゴニオの式として知られ、垂直衝撃波を通過する際に際の圧力上昇であり、以下の式で示される。

$$p_2/p_1 = \frac{2\gamma M_{1\infty}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (9.2)$$

そして、黒の点線は流れが音速まで等エントロピー的に減速される際の圧力比であり、以下の式で表される。



$$\frac{p_2}{p_1} = \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_{1\infty}^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (9.3)$$

図 9.10 から明らかなように、 $Re^*=1.2 \times 10^6$ ,  $1.2 \times 10^7$  の数値計算結果は Arens のモデルと定量的に良く一致する一方、 $Re^*=1.2 \times 10^4$ ,  $1.2 \times 10^5$  の数値計算結果とは異なっていることがわかる。

### 9.3.3 衝撃波-境界層はく離による圧力上昇

各レイノルズ数別の干渉点付近における速度分布を図 9.11 に示す。数値計算結果を図中に赤線で、以下の式(9.4)によって表される曲線を図中に青線でそれぞれ示す。

$$\frac{u_1}{u_{1\infty}} = \frac{y_w}{\delta_1} \left( 2 - \frac{y_w}{\delta_1} \right) \quad (9.4)$$

式(9.4)は、層流境界層の速度分布を予測する際に用いられる式である。また、乱流境界層の速度分布は以下式のように、1/7 乗則で表される。

$$\frac{u_1}{u_{1\infty}} = \left( \frac{y_w}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (9.5)$$

ここで、 $y_w$  は壁面からの垂直距離、 $\delta_1$  は干渉開始点における境界層厚さをそれぞれ示す。

図 9.11 に示すように、干渉開始点における境界層の速度特性は、レイノルズ数の増加とともに、層流から乱流へ変化していることがわかる。

以上より、Arens の流れモデルによる低レイノルズ数流れでのはく離圧力比の予測は困難であることが結論できる。

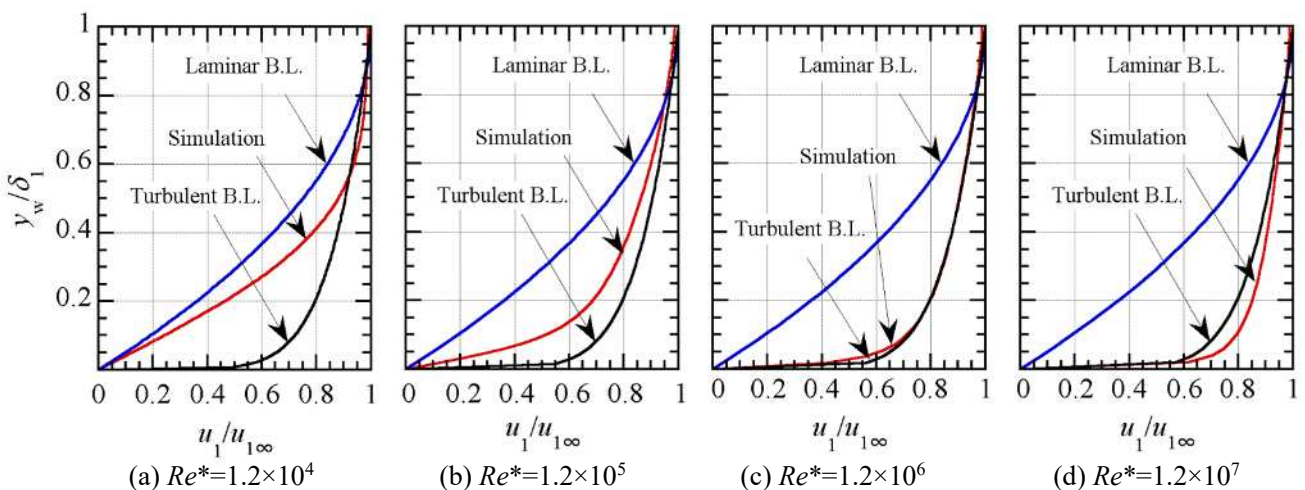


図 9.11 レイノルズ数別の干渉点における境界層内速度分布

## 9.4 本章のまとめ

二次元ベンチュリノズルを通る低レイノルズ数過膨張流れについて、衝撃波による境界層のはく離に着目し、実験および数値計算により調査した。さらに、数値計算結果により得られた結果を衝撃波によるはく離の理論<sup>[8,9]</sup>と比較することで理論式を評価した。本実験で、二次元ベンチュリノズル内の衝撃波を伴う流れ場を、レインボーシュリーレン法により定量的に初めて可視化することができた。またスロートを代表長さとおいたレイノルズ数  $Re_{th}$  が、衝撃波と境界層との干渉に及ぼす影響を  $k$ -SST モデルを使用した 2 次元モデルの数値計算により調査した結果、レイノルズ数  $Re_{th} \geq 1.2 \times 10^5$  の場合、境界層のはく離による圧力上昇は、Arens の流動モデル<sup>[8,9]</sup>とよく一致することが明らかとなった。しかし、レイノルズ数が低い場合のはく離圧力比は、Arens の理論曲線と比較して大きく異なることがわかった。

## 第 10 章 結論

本研究では、低レイノルズ数域における過膨張流れの特性を明らかにすることを目的とし、RANS 方程式を用いた数値計算と光学的可視を用いた実験により調査を行った。得られた結果を要約すると以下の通りである。

### 10.1 臨界ノズルを通る低レイノルズ数流れの数値計算

トロイダルスロートベンチュリノズルを通る窒素ガスの流れ場を  $k-\omega$  SST 乱流モデルを使用した RANS 方程式によって数値的に解いた。本数値計算は、ISO 9300 で推奨される下限値を下回る理論レイノルズ数範囲  $Re_{th} \approx 600 \sim 11820$  で実施した。その結果以下のことが分かった。

- (1) 流出係数  $C_d$  は、 $Re_{th}=630 \sim 4000$  にかけて急激に増加し、 $Re_{th}=4000 \sim 14000$  の範囲にかけては、緩やかな勾配で直線的に増加する。これは、境界層の層流から乱流への遷移が  $Re_{th} \approx 600 \sim 2500$  の区間で発生するためと述べている中尾と高本の研究結果<sup>[4]</sup>と一致している。
- (2)  $Re_{th}=630$  におけるノズル内の流れ場は、流れがノズル内ではく離し、ノズル内部と外部で明確な衝撃波は発生しない。また、ノズル内の主流マッハ数は最大で約 1.2 である。
- (3)  $Re_{th}=11820$  におけるノズル内の流れ場は、ショック・トレーンによって周期的な圧力波が発生する。衝撃波直前の主流マッハ数は最大で 1.4 である。これは、衝撃波直前の主流マッハ数が約 1.5 を超えるとショック・トレーンが発生するとされる従来の研究結果<sup>[19]</sup>と異なることを示している。

### 10.2 低レイノルズ数過膨張流れにおける衝撃波の特性

低レイノルズ数での過膨張状態における二次元ベンチュリノズル内の流れ場をレインボーシュリーレン法により、光学的に可視化し、はく離圧力の理論曲線と比較した。また、レーザーシュリーレン法とマッハ・ツェンダー干渉計のそれぞれに高速度デジタルカメラを組み合わせることで、二次元ベンチュリ内部の衝撃波振動を測定することに成功した。その結果以下のことが分かった。

- (1) 衝撃波がノズルスロートの下流近傍で発生し、その位置は背圧比が減少するにしたがって、徐々に下流方向へ移動する。
- (2) 衝撃波の形状は背圧比の減少に従い、垂直衝撃波からショック・トレーンへと徐々に変化する。また、ショック・トレーンが発生する直前のマッハ数は最大で約 1.4 であり、

これは、従来の研究<sup>[19]</sup>で報告されてきた、ショック・トレーンの発生直前マッハ数よりも小さい値である。

- (3) 垂直衝撃波のはく離圧力比は、強い斜め衝撃波に対する理論解と良く一致する。
- (4) ショック・トレーンのはく離圧力比は、理論値と一致せず、背圧比が変化しても一定値を示す。
- (5) レイノルズ数  $7.5 \times 10^4$  において、垂直衝撃波がノズルスロート付近で発生し、約 3 kHz の支配周波数で振動する。

### 10.3 低レイノルズ数過膨張流れの衝撃波による境界層のはく離

二次元ベンチュリノズルを通る低レイノルズ数過膨張流れについて、衝撃波による境界層のはく離に着目し、実験および数値計算により調査した。本実験で、二次元ベンチュリノズル内の衝撃波を伴う流れ場を、レインボーシュリーレン法により定量的に初めて可視化することができた。さらに、数値計算結果により得られた結果を衝撃波によるはく離の理論<sup>[8,9]</sup>と比較することで理論式を評価した。その結果以下のことが分かった。

- (1) レイノルズ数  $Re_{th} \geq 1.2 \times 10^5$  の場合、境界層のはく離による圧力上昇は、Arens の流動モデルとよく一致する。このとき、干渉開始点における境界層の速度特性は、乱流に近い。
- (2) レイノルズ数が低い場合のはく離圧力比は、Arens の理論曲線<sup>[8,9]</sup>による評価と比較して大きく異なる。このとき、干渉開始点における境界層の速度特性は層流に近い。

## 参考文献

- (1) Phalnikar, K. A., Kumar, R., & Alvi, F. S. (2007). *Experiments on free and impinging supersonic microjets. Experiments in Fluids*, 44(5), 819–830.
- (2) ISO 9300, Measurement of gas flow by means of critical flow Venturi nozzles (1990)
- (3) JIS B 7566, Calibration and proving test for gas flowmeter
- (4) NAKAO, S., HIRAYAMA, T., & TAKAMOTO, M. (2000). *Relations between the Discharge Coefficients of the Sonic Venturi Nozzle and a Kind of Gases. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series B*, 66(642), 438–444.
- (5) Kim, H.-D., Kim, J.-H., Park, K.-A., Setoguchi, T., & Matsuo, S. (2004). *Study of the effects of unsteady downstream conditions on the gas flow through a critical nozzle. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 218(10), 1163–1173.
- (6) Von Lavante, E., Zachcial, A., Nath, B., & Dietrich, H. (2001). *Unsteady effects in critical nozzles used for flow metering. Measurement*, 29(1), 1–10.
- (7) 松尾一泰, 圧縮性流体力学, (1994), 理工学社, pp.70~96, pp.106~114, pp.263~284.
- (8) ARENS, M., & SPIEGLER, E. (1963). *SHOCK-INDUCED BOUNDARY LAYER SEPARATION IN OVER-EXPANDED CONICAL EXHAUST NOZZLES. AIAA Journal*, 1(3), 578–581.
- (9) Arens, M. (1963). *The Shock Position in Overexpanded Nozzles. Journal of the Royal Aeronautical Society*, 67(628), 268–269.
- (10) MIYAZATO, Y., KASHITANI, M., KIM, H.-D., KATANODA, H., & MATSUO, K. (1997). *Shock-Induced Turbulent Boundary Layer Separation in Supersonic Nozzles. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series B*, 63(607), 879–886.
- (11) Matsuo, K., Hong, J.-W., Kim, H.-D., & Miyazato, Y. (1995). *Weak Normal Shock Wave/Turbulent Boundary Layer Interaction in a Supersonic Nozzle. 1st Report, Time-mean Flow Characteristics. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series B*, 61(581), 42–47.
- (12) Romine, G. L. (1998). *Nozzle Flow Separation. AIAA Journal*, 36(9), 1618–1625.
- (13) Handa, T., Masuda, M., & Matsuo, K. (2003). *Mechanism of Shock Wave Oscillation in Transonic Diffusers. AIAA Journal*, 41(1), 64–70.
- (14) Al-Amman, K., Agrawal, A. K., Gollahalli, S. R., & Griffin, D. (1998). *Application of rainbow schlieren deflectometry for concentration measurements in an axisymmetric helium jet. Experiments in Fluids*, 25(2), 89–95.

- (15) Yamamoto, H., Irie, M., Miyazato, Y., & Matsuo, K. (2010). *Application of rainbow schlieren deflectometry for axisymmetric supersonic jets (comparison of experiments with numerical analysis)*. *Journal of Thermal Science*, 19(3), 218–221.
- (16) Takano, H., Kamikihara, D., Ono, D., Nakao, S., Yamamoto, H., & Miyazato, Y. (2016). *Three-dimensional rainbow schlieren measurements in underexpanded sonic jets from axisymmetric convergent nozzles*. *Journal of Thermal Science*, 25(1), 78–83.

## 謝辞

本論文を作成するにあたり，多くのご支援とご指導を賜りました。

主査である仲尾晋一郎准教授には，研究設備の手配や本論文の執筆等で多大なご支援を頂きました。また，本研究を社会人生活と並行して進めるに当たり，多くご助言を頂きました。ここに深く感謝申し上げます。

副査である宮里義昭教授には，学会発表練習や論文添削に於いて親身に対応して頂きました。心から感謝の意を表します。

副査である吉山定見教授には，本論文の添削に於いて親身に対応して頂きました。心から感謝の意を表します。

副査である木原隆典准教授には，本論文の構成に対する修正事項を的確に指示して頂きました。心から感謝の意を表します。

同研究室の諸先輩，所属学生の皆様には，実験，数値計算のサポートや本論文の校正等でご協力頂きました。ここに厚く御礼申し上げます。

最後に，博士後期課程進学に理解を示し，これまで暖かく見守ってくれた家族に心から感謝します。

2020年4月

八木奏一郎