ハロッド＝ドーマー・モデルにおける GDPギャップの動きについて

田　中　淳　平

概要

本稿では簡単なハロッド＝ドーマー・モデルを用いて、ある期間における投資需要が①GDPの関数である場合、②GDPギャップの関数である場合、③加速度原理によって定式化される場合、の3つの場合についてGDPギャップの時間的推移がどのようになるかを理論的に考察する。GDPギャップの動学的挙動は①のケースにおいて大域的安定、②のケースにおいて大域的不安定となり、そして③のケースにおいては一定の条件の下で複数均衡が生じ、片方の均衡は大域的安定、もう片方の均衡はサドル安定的となることが示される。

JEL Classification：E12、E13、E22、E32、E61

Key Words：ハロッド＝ドーマー・モデル、GDPギャップ、投資変動

1．はじめに

この論文では古典的なハロッド＝ドーマー・モデル（Harrod（1939）、Domar（1946））を用いて投資需要の変動とGDPギャップ（もしくは稼働率）の動学との関係を理論的に考察する。現実の経済においては一般に経済成長率が高い（低い）ときはGDPギャップが縮小（拡大）する[1]が、この関係を新古典派成長理論を用いて説明するのは容易ではない。なぜなら新古典派成長理論は基本的には潜在的GDPと現実GDPが常に等しい状況を想定した成長理論だからである。したがってこの種の現象はハロッド＝ドーマー・モデルのようなケインズ的な成長モデルを用いることでより自然な説明が可能となるが、ハロッド＝ドーマー・モデルは米国を主流とみなす学界においてはほとんど忘れ去れた感があり、こうした方向性の研究は私の知る限りではほとんど存在しない[2]。しかし、例えば日本経済におけるこの20年の間に生じたマクロ経済変動などを念頭におくと、こうした方向性の研究の必要性は決して低くないと思われる。

ハロッド＝ドーマー・モデルにおいて現実のGDPを決定するのは投資需要であるから、GDPギャップの時間的推移は投資需要の成長経路がどのように定式化されるのかに本質的に依存す

---

1 一つの研究例として、鎌田・増田（2001）では1980年代前半から1990年代末までの日本のGDPギャップが推計されているが、1980年代後半のバブル期においてGDPギャップは縮小し、バブル崩壊後はそれが拡大し続けていることを明らかにしている。

2 非常に古い文献においてそのような研究がなされている可能性があるが、それを検索するのは困難である。

るであろうことは想像に難くない。本稿では投資需要が①GDPの関数である場合、②GDPギャップの関数である場合、そして③加速度原理によって定式化される場合、の3つの場合についてGDPギャップの時間的推移を理論的に検討する。これらの3つのケースのうち、テキストや研究書でしばしば取り上げられるのは②のケース、すなわち投資需要成長率がその期のGDPギャップの減少関数として定式化される場合であり、このときGDPギャップの動学は「ナイフの刃」として例えられるような不安定性を持つことがよく知られている[3]。本稿では投資需要成長率がその期ではなく1期前のGDPギャップの減少関数として定式化される場合においても、同様の結論が成立することを確認する。

一方、投資需要が①や③のように定式化される場合を検討したものは私の知る限り存在しない。そしてこれらのケースでは②のケースとは全く異なるGDPギャップの動学が生み出されることを明らかにする。まず最も単純な投資の定式化である①のケースにおいて導出されるGDPギャップの動学は、ケース②とは対照的に大域的に安定となる。すなわち、どのようなGDPギャップの初期値から出発しても、GDPギャップは長期的にはある定常値へと収束する[4]。他方、投資需要を③のように定式化するとGDPギャップの定常値について複数均衡（高位均衡と低位均衡）が生じ、前者は安定的、後者は不安定的となり、上の①と②の両方の結論を含むような動学が生成されることが示される。こうした分析結果は安易にハロッド＝ドーマー・モデルを「ナイフの刃」で例えられるような極めて不安定な成長経路を生み出す理論と安易に分類することに疑問を投げかけるものと言えるかもしれない。

本稿の以下の構成は次の通りである。2節では投資需要が前期のGDPの一定割合であるような場合におけるGDPギャップの動学が検討される。3節及び4節では投資需要決定がそれぞれGDPギャップの大きさに依存する場合と加速度原理によって決定される場合におけるGDPギャップの動学が分析される。最後に5節で結論を述べる。

２．基本モデル

本稿で分析される成長モデルは政府部門と海外部門を捨象した単純なハロッド＝ドーマー・モデルであり、その構造は以下のように規定される。まず、期間ｔにおける均衡GDPは有効需要の原理によって決定される。この経済の総需要は

（1） $$AD_t = C_t + I_t$$

で与えられるが、ここで消費関数を

（2） $$C_t = cY_t \qquad (0 < c < 1)$$

---

3 例えば浅田（1997）や伊藤・岩井（1996）など。

4 もちろん、このGDPギャップの定常値が0（すなわち資本の完全稼動）となる保証はなく、マクロ的な不均衡状態が長期的に継続し続けるという意味において、新古典派成長理論における安定的成長経路とは全く意味合いを異にしていることは言うまでもない。

と特定化すると、期間 t における均衡GDPは

（3）　$Y_t = I_t / s \qquad (s \equiv 1 - c)$

となる。これより均衡GDPの時間経路は投資需要 I_t の時間経路が与えられればそれに対応して一意に定まることになる。この節では投資需要の時間経路が単純に

（4）　$I_{t+1} = (1+g) I_t \qquad (I_0$ ：所与）

で与えられるような経済を考える。これは投資需要が毎期 g の率で成長することを意味するが、この定式化は期間 t における投資需要が期間 t － 1 の均衡GDPの関数として決定されるような投資関数を想定することと同じ意味を持つ。なぜなら、そのような投資関数を

（5）　$I_t = \beta Y_{t-1}$

とおくと、期間 t の投資は以下のように書くことができるからである。

（6）　$I_t = \beta Y_{t-1} = \dfrac{\beta}{s} I_{t-1}$

ともあれ、毎期の投資の経路が（4）で与えられると均衡GDPもまた毎期 g の率で成長し続けることになる。

以上が経済の需要サイドの考察であるが、（4）で与えられる投資活動はまた、資本蓄積を通じて経済の供給サイドを増強することにもつながる。次のように与えられるAK型のマクロ的生産関数を想定しよう。

（7）　$Y_t^F = AK_t$

ここで Y_t^F は潜在的GDPの水準、A は資本の生産性（もしくは「資本係数」の逆数）、K_t は期間 t 期首における資本ストック量を意味している[5]。したがって各期の期首における資本ストックの時間経路が与えられるとこの経済の潜在的GDPの時間経路もまた一意に確定することになるが、その時間経路は以下の資本ストック蓄積式によって定められる。

（8）　$K_{t+1} = I_t + (1-\delta) K_t \qquad (K_0$ ：所与）

（4）及び（8）より I_t 及び K_t に関して閉じた連立差分方程式が構成されるので、これより資本ストック賦存量の時間経路が定まり、潜在的GDPの経路も確定することが分かる。資本投資

[5] 本稿のモデルにおいて期間 t 期首に存在する資本量と期間 t に実際に生産活動に投入される資本量は一般に異なることに注意せよ。

比率を $x_t \equiv K_t / I_t$ と定義すると（4）と（8）より x_t の動学は次のようになる。

（9）
$$x_{t+1} = \frac{1}{1+g} + \frac{1-\delta}{1+g} x_t$$

ここで $1+g > 1-\delta$ と想定するのが現実的なので、以下ではそれが満たされていると仮定する。その場合、x_t の動学は大域的に安定となり、どのような初期値から出発しても以下の定常値に収束する。

（10）
$$x^* = \frac{1}{g+\delta}$$

したがって投資成長率が g であれば、長期的には期間 t 期首に存在する資本 K_t の成長率もその水準へと収束することになる。

最後に、この経済の資本稼働率 κ は（3）と（7）から

（11）
$$\kappa_t = \frac{Y_t}{Y_t^F} = \frac{1}{sA} x_t^{-1}$$

で表わされる[6]ので、これを（9）に代入することで κ に関する以下の動学式を得る。

（12）
$$\kappa_{t+1} = \frac{(1+g)\kappa_t}{sA\kappa_t + (1-\delta)} \qquad (\kappa_0 \text{：所与})$$

（図1：投資需要がGDP水準に依存する場合）

図1からも明らかなように、この場合の κ の動学は大域的に安定的であり、どのような初期値 κ_0 から出発しても κ は以下の定常値へと収束することになる。

（14）
$$\kappa^* = \frac{g+\delta}{sA}$$

もちろんこの定常値が1（＝すなわちGDPギャップが0）となる保証はない。定常値が1であるためには、外生的に与えられた投資需要の成長率が

（15）
$$g = sA - \delta$$

を満たす必要があるが、これはよく知られている保証成長率（もしくは適正成長率）に他ならない。興味深いのは、現実の投資需要成長率 g がこの保証成長率とは異なっていたとしても、

6 GDPギャップの正確な定義は

GDPギャップ＝（均衡GDP－潜在的GDP）／潜在的GDP

で与えられるので、このモデルにおいてGDPギャップは $\kappa - 1$ に等しい。したがってGDPギャップの動学を分析することは κ の動学を分析することに等しい。

κの時間経路自体は安定的だということである。例えば当初、定常状態において投資成長率gが保証成長率と等しかったが、何らかの要因によってその成長率が恒久的に低下したとしよう。そのとき、新たな定常状態において資本の完全稼動は満たされないが、経済がその新しい定常状態に向かって安定的に移行するという点では体系に不安定性は存在しないと言える[7]。

このモデルにおいて投資成長率gの上昇（低下）は（3）及び（14）より、経済成長率を加速（減速）させると同時にGDPギャップを縮小（拡大）させる。この意味で、この単純なモデルは現実のマクロ経済変動の特徴をうまく捉えているといえる。また、貯蓄性向s及び生産性Aの上昇は共に定常状態における資本稼働率κを低下させるが、それは以下の理由による。まず前者については、貯蓄性向sの上昇はこの経済の乗数の値を低下させ、他の条件を一定として均衡GDPを引き下げる効果を生むため、定常状態における資本稼働率を低下させる。一方後者については、均衡GDPが有効需要原理によって決定されるような状況において生産性の上昇は均衡GDPと潜在的GDPの乖離を大きくさせるだけなので、やはり定常状態における資本稼働率を低下させる。言うまでもなく長期的視点からは貯蓄性向の上昇や生産性の改善は高い成長率を達成するためには不可欠な要素であるから、以上の結論はあくまで需要制約に直面している経済における短期的効果を示したものと解釈されるべきである。

３．投資がGDPギャップの関数として定式化される場合

ハロッド＝ドーマー・モデルを紹介する多くの文献はそのモデルの動学が「ナイフの刃」として例えられるような不安定性を持つことを強調しているが、それは投資需要の成長が資本稼働率κの関数として定式化される場合に相当している。この節ではその点を再検討し、投資需要の成長率がその期におけるκの関数である場合だけでなく、1期前のκの関数として定式化される場合もまた、κの動学は大域的に不安定となることを明らかにする。

投資需要の成長を定式化した（4）を以下のように修正しよう。

（15）　$$I_{t+1}=\phi(\kappa_t)I_t \qquad \text{（ただし、}\phi'(\kappa_t)>0\text{）}$$

一般に景気が上向きで資本稼働率が高いときほど次期の投資が活性化するであろうから、関数ϕはκの増加関数と想定することができる。このとき、（9）に相当するx_tの動学は以下のようになる。

（16）　$$x_{t+1}=\frac{1+(1-\delta)x_t}{f(x_t)} \qquad \text{（ここで、}f(x_t)\equiv\phi(\frac{1}{sA}x_t^{-1})\text{）}$$

まず最初に、関数ϕを以下のように特定化した場合について考えてみよう。

（17）　$$\phi(\kappa_t)=\phi\times\kappa_t \qquad (\phi>0)$$

---

[7] 言うまでもなく以上の分析では労働力の成長を無視している。もし労働力の成長率（いわゆる自然成長率）がgと異なるのであれば、雇用に関してはギャップが累積的に広がる。例えば自然成長率がgよりも大きいのであれば、労働雇用率は時間と共に低下し続けることになる。

この場合、 の動学は

（18） $$x_{t+1}=\frac{sA}{\phi}x_t[1+(1-\delta)x_t]$$

となるので、この体系の位相図は図2のようになり、

（19） $$\left.\frac{dx_{t+1}}{dx_t}\right|_{x_t=0}=\frac{sA}{\phi}<1$$

が満たされるならば、有意な定常均衡が一意に存在しそれは大域的に不安定となる。

（図2：投資成長が資本稼働率κに依存する場合）

投資成長率が資本稼働率の増加関数のとき、このような不安定性が生じる経済学的な理由は次のとおりである。まず供給サイドにおいては今期の投資1単位の低下は次期の潜在的GDPをA単位低下させる。一方、需要サイドにおいては、もし次期の投資需要が今期の資本稼働率に敏感に反応するなら、今期の投資1単位の低下はその期の資本稼働率の低下を通じて次期の投資需要を大きく減退させ、その結果均衡GDPの水準をA単位以上低下させる可能性がある。そしてそのような事態が実現してしまうとGDPギャップは時間を通じて累積的に拡大し、やがて資本稼働率が0へと低下してしまうのである。

投資成長の定式化を（17）のような単純な関数形に特定化しない場合においても同様の結論は成立しうる。Appendix 1で示されるように（16）で表わされるx_tの動学は以下の条件が成立するとき大域的に不安定となる。

（18） $$f''(x_t)<-2f'(x_t)\left[\frac{1-\delta}{1+(1-\delta)x_t}-\frac{f'(x_t)}{f(x_t)}\right]\quad(>0)$$

ここで（18）の右辺はある正数であるのに対し、$f''(x_t)$は

（19） $$f''(x_t)=\frac{2}{sA}x_t^{-3}\phi'(\kappa_t)+\left[\frac{1}{sA}x_t^{-2}\right]^2\phi''(\kappa_t)$$

で与えられるので、（18）が成立するためには、$\phi''(\kappa_t)$の値が十分に小さいものでなければならないことが分かる。したがって$\phi''(\kappa_t)$の値が十分に小さいならば、投資成長率が（15）で定式化されるより一般的な場合についても定常均衡が一意に存在し、それは大域的に不安定となる。

以上のような結論は、投資成長率が今期の資本稼働率にではなく、1期前のそれに依存するような場合においても成立する。以下ではその点について確認しておこう。まず、投資成長を次のように定式化する。

（20） $$I_{t+1}=\phi(\kappa_{t-1})I_t\qquad（ここで、\phi(\kappa_t)\equiv\phi\times\kappa_{t-1}）$$

この場合、x_tの動学は

（21）　$$x_{t+1}=\frac{sA}{\phi}x_{t-1}[1+(1-\delta)x_t]$$

となる。これは非線型の2階差分方程式であるが、$y_{t+1}\equiv x_t$ と新しく変数を定義することで以下のような連立の1階差分方程式へと変換することができる。

（22）　$$x_{t+1}=\frac{sA}{\phi}y_t[1+(1-\delta)x_t]$$

$$y_{t+1}\equiv x_t$$

ここで$\Delta x_t\equiv x_{t+1}-x_t$、$\Delta y_t\equiv y_{t+1}-y_t$と定義すると、$\Delta x_t$ ＝0線とΔy_t ＝0線はそれぞれ以下のようになる。

（23）　（Δx_t＝0 線）　$$y_t=\frac{\phi x_t}{sA[1+(1-\delta)x_t]}$$

（Δy_t＝0 線）　$$y_t=x_t$$

したがってこの体系の位相図は図3のようになり、有意な定常均衡は一意に存在し、かつサドル安定的となることがわかる。なお、この点に関するより解析的な取り扱いについてはAppendix 2で行われており、そこでは定常均衡の近傍における局所的な安定性がやはりサドル安定的となることが証明されている。（22）で記述される体系は2個の初期値(x_0,y_0)（もしくは同じことであるが(x_0,x_{-1})）が与えられてはじめて一つの時間経路が定まるわけであるが、この体系がサドル安定的ということはその2つの初期値が偶然サドル経路上に位置している場合に限り定常状態へと収束することを意味している。言い換えると、その2つの初期値がサドル経路上から少しでも乖離していると体系は定常状態からどんどん遠ざかることになるので、投資成長が1期前の資本稼働率に依存する場合もκの動学は基本的に不安定なものであることが分かる。

（図3：投資成長が1期前の資本稼働率に依存する場合）

４．投資が加速度原理によって定式化される場合

最後に投資需要が以下のような加速度原理に基づいて決定されるような場合を考えよう。

（24）　$$I_{t+1}=v(Y_t-Y_{t-1})$$　（ここで、$v\equiv A^{-1}$）

（3）より、これは投資需要の時間経路が

（25）　$$I_{t+1}=\frac{v}{s}(I_t-I_{t-1})$$

に従うことを意味している。（25）は線形の2階差分方程式であり、その特性方程式は以下のようになる。

（26） $$f(b) = b^2 - \frac{v}{s}b + \frac{v}{s} = 0$$

この方程式の解の性質ついて、以下の4つの場合に分類することができる。

（i）$0 < \frac{v}{s} < 1+\sqrt{3}$：この場合（26）の解は虚数解となり、かつその絶対値の大きさは1未満となるので、I_t は振動を繰り返しながら0へと減衰していく。

（ii）$\frac{v}{s} = 1+\sqrt{3}$：この場合（26）の解は虚数解となり、かつその絶対値の大きさは1となるので、は同じ幅の振動を永久に繰り返すことになる。

（iii）$1+\sqrt{3} < \frac{v}{s} < 4$：この場合（26）の解は虚数解となり、かつその絶対値の大きさは1よりも大きくなるので、I_t は振動を繰り返しながら発散していく。

（iv）$\frac{v}{s} \geq 4$：この場合（26）の解は実数解となり、かつその絶対値の大きさは1よりも大きくなるので、I_t は単調に発散していく。

なお、注意すべきなのは、このモデルにおいて投資需要 I_t が時間を通じて発散するとしても、資本投資比率 x_t は発散するとは限らないということである（実際、2節の定式化においても投資は通時的に g の率で単調に成長（＝発散）していたのである）。したがって、経済の資本量が投資を通じて毎期増え続けるような状況においては、投資需要もまた時間を通じて増加し続ける方がより自然であるといえる。

投資が加速度原理によって決定される場合のマクロ動学は（8）と（24）で規定されることになるが、新たな変数 ϕ を $\phi_{t+1} \equiv I_{t+1}/I_t$ と定義すると、この動学体系は以下のように変形できる。

（27） $$x_{t+1} = \frac{s}{v}\frac{\phi_t}{\phi_t - 1}[1+(1-\delta)x_t]$$

$$\phi_{t+1} = \frac{v}{s}\frac{\phi_t - 1}{\phi_t}$$

さらに位相図を書きやすくする都合上、新しく $m_t \equiv 1/x_t$、$\psi_t \equiv 1/\phi_t$ と定義し、体系をさらに以下のように書き直すのが便利である。

（28） $$m_{t+1} = \frac{v}{s}(1-\psi_t)\frac{m_t}{m_t + (1-\delta)}$$

$$\psi_{t+1} = \frac{s}{v}\frac{1}{1-\psi_t}$$

ここで$\Delta m_t \equiv m_{t+1} - m_t$、$\Delta\psi_t \equiv \psi_{t+1} - \psi_t$と定義すると、$\Delta m_t$＝0線と$\Delta\psi_t$＝0線はそれぞれ以下のようになる。

（29）　（Δm_t＝0線）　$m_t = -\dfrac{v}{s}\psi_t + \dfrac{v}{s} - (1-\delta)$

（$\Delta\psi_t$＝0線）　$f(\psi_t) = \psi_t^2 - \psi_t + \dfrac{s}{v} = 0$

したがってこの体系に定常状態が存在するためには$\Delta\psi_t$＝0線を意味する方程式$f(\psi_t)$＝0が$0 < \psi_t < 1-(1-\delta)s/v$の範囲内に実数解を持つ必要がある。そのようなケースとしては以下の2つの場合がある。

（Ⅰ）$\dfrac{v}{s}$＝4が成立する場合

この場合、$f(\psi_t)$＝0は重根を持ち、その解の値は$\psi_t = 1/2$となる。したがってこの場合、体系の位相図は図4.aのようになり、有意な均衡は一意に存在する。ただ、その安定性は幾分風変わりなものとなる。すなわち、ψの初期条件が$1/2$以下なら、体系は定常状態へと収束するが、それが よりも大きい場合は時間の経過と共に定常状態から遠ざかって行く形になる。すなわちこの場合、体系は完全安定、サドル安定、完全不安定のいずれとも異なる性質を持つことになる。これは体系を線形近似したときの係数行列の固有根の片方が1に等しく、もう片方が1以下となっていることを示唆している。

（Ⅱ）$\dfrac{v}{s}$＞4が成立する場合

この場合、$f(\psi_t)$＝0は異なる二つの実数解を持つことになるが、この条件の下で

（30）　$f(0) > 0$、　$f'(0) < 0$、　$f[1-(1-\delta)s/v] > 0$、　$f'[1-(1-\delta)s/v] > 0$

が成立することを容易にを示すことができる。したがって方程式$f(\psi_t)$＝0は0と$1-(1-\delta)s/v$の間に二つの実数解を持つことになり、その結果体系の位相図は図4.bのようになる。図から明らかなように、この場合は定常均衡が複数存在し、大きなmを持つ定常均衡は大域的に安定となるのに対し、小さなmを持つ定常均衡はサドル安定となる。定常状態におけるmの値が大きいということは、xが小さく、ゆえにκが大きいことを意味しているので、その定常状態における資本稼働率が高いことを意味している。他方、定常状態における資本稼働率が低い低位均衡の方は、初期値(x_0, ϕ_0)が偶然そのサドル経路上に乗っていない限り、その定常状態へと収束しない。

（図4：投資需要が加速度原理で決定される場合）

以上より、投資需要が加速度原理によって決定される場合は、加速度係数vの大きさに御応じて、単一の反安定的な均衡が生じる場合や、安定的な均衡とサドル安定的な均衡が同時に生

じる場合などがあり、2節と3節で得られた結論とは異なる、より複雑なマクロ動学が生み出す可能性があることが明らかにされた。

５．結論

本稿では簡単なハロッド＝ドーマー・モデルを用いて、ある期間における投資需要が①GDPの関数である場合、②GDPギャップの関数である場合、③加速度原理によって定式化される場合、の3つの場合についてGDPギャップの時間的推移がどのようになるかを理論的に考察した。一般にハロッド＝ドーマー・モデルは新古典派成長理論とは対照的に均衡成長経路が非常に不安定な性質を持つという点が強調されがちであるが、そのような結論は投資需要の定式化に大きく依存しており、上の3つの定式化のうち経済がそうした不安定性によって規定されるのはテキスト等で指摘される②のケースのみで①や③の定式化の下では②のような不安定性を持つわけではないことが明らかにされた。ハロッド＝ドーマー・モデルは最近ではほとんど顧みられなくなりつつあるが、もしその理由がモデルが生み出す極端な不安定性が現実の経済の運行とは相容れないという点にあるのであれば、そのような理由でこのモデルの価値を軽視するのは不当であると思われる。とりわけ不況期におけるように総需要の低下が経済に少なからず影響を与えるような比較的短期の経済動態を研究する上で、このモデルは新古典派成長理論よりも有用性が高く多くの研究者によって取り上げられる価値があると私は考える。

（Appendix 1）

ここでは（16）で示される動学が（18）の下で大域的に不安定となることを示す。まず関数 $f(x_t)$ について以下が成立する。

$$f'(x_t) = -\frac{1}{sA}x_t^{-2}\phi'(\kappa_t) < 0$$

$$f''(x_t) = \frac{2}{sA}x_t^{-3}\phi'(\kappa_t) + \left[\frac{1}{sA}x_t^{-2}\right]^2\phi''(\kappa_t)$$

また、（16）に関して以下が成立する。

$$\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = \frac{(1-\delta)f(x_t) - [1+(1-\delta)x_t]f'(x_t)}{[f(x_t)]^2} > 0$$

$$\frac{d^2x_{t+1}}{dx_t^2} = \frac{-[1+(1-\delta)x_t]f(x_t)f'(x_t) - 2f'(x_t)\times\{(1-\delta)f(x_t) - [1+(1-\delta)x_t]f'(x_t)\}}{[f(x_t)]^3}$$

（16）で示される動学が大域的に不安定となるための十分条件は $\dfrac{dx_{t+1}}{dx_t} > 0$ かつ $\dfrac{d^2x_{t+1}}{dx_t^2} > 0$ な

ので、これは$\dfrac{d^2 x_{t+1}}{dx_t^2}$の分子が正でなければならないことを意味している。したがって、大域的不安定性の十分条件は本文（18）で与えられる。

（Appendix 2）

ここでは（22）で示される動学体系が定常均衡の近傍でサドル安定的となることを示す。（22）を定常状態で線形近似すると以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}-x^* \\ y_{t+1}-y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{sA}{\phi} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t-x^* \\ y_t-y^* \end{bmatrix}$$

ここで行列$\begin{bmatrix} 1-\dfrac{sA}{\phi} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$の特性方程式は

$$f(\lambda)=\lambda^2-(1-\frac{sA}{\phi})\lambda-1=0$$

で与えられるが、に関して以下が成立する。

$$f(1)=-（1-\frac{sA}{\phi}）=-f(-1)$$

したがって、$f(1)$が正（負）なら$f(-1)$は負（正）となり、これは特性方程式の片方の解の絶対値は1以上、もう片方の解の絶対値が1以下となることを意味しているので、（22）で示される体系はサドル安定的となる。

（Appendix 3）

ここでは（28）で示される動学の定常均衡の近傍における局所安定性について検討する。（28）の定常状態を とし、（28）をその定常状態で線形近似した体系は

$$\begin{bmatrix} m_{t+1}-m^* \\ \psi_{t+1}-\psi^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1-\delta)s/v}{1-\psi^*} & -\dfrac{m^*}{1-\psi^*} \\ 0 & \dfrac{\psi^*}{1-\psi^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_t-m^* \\ \psi_t-\psi^* \end{bmatrix}$$

となる。したがってこの場合の特性方程式は

$$f(\lambda)=\left[\lambda-\frac{(1-\delta)s/v}{1-\psi^*}\right]\left[\lambda-\frac{\psi^*}{1-\psi^*}\right]=0$$

で与えられ、二つの固有根はそれぞれ次のようになる。

$$\lambda_1=\frac{(1-\delta)s/v}{1-\psi^*}、\quad \lambda_2=\frac{\psi^*}{1-\psi^*}$$

（Ⅰ）$v/s=4$が成立する場合

この場合、$\psi^*=1/2$ が成立するので、本文中で示唆しておいたとおり、確かに $\lambda_1=(1-\delta)/2$、$\lambda_2=1$となる。

（Ⅱ）$v/s>4$が成立する場合

この場合、高位均衡に対応するψ_1と低位均衡に対応する（ただし$\psi_1<\psi_2$）の二つの場合に関して、λ_1とλ_2の大きさについて検討する必要がある。しかし、λ_1に関しては、ψは（30）よりψ_1かψ_2かに関係なく$\psi<1-(1-\delta)s/v$が成立しているので、これより常に$0<\lambda_1<1$が成立する。一方、λ_2に関しては、$f(1/2)=\frac{s}{v}-\frac{1}{4}<0$が成立するので$\psi$に関して$0<\psi_1<1/2<\psi_2<1-(1-\delta)s/v$が成立し、

$$\psi=\psi_1 \text{のとき、} 0<\lambda_2<1$$

$$\psi=\psi_2 \text{のとき、} \lambda_2>1$$

となる。したがって、高位均衡（すなわち$\psi=\psi_1$）のときは固有根の絶対値が二つとも1よりも小さくなるので均衡は大域的に安定となり、他方、低位均衡（すなわち$\psi=\psi_2$）のときは片方の根の絶対値が1よりも大きく、もう片方のそれが1よりも小さくなるので均衡はサドル安定的となることが示された。

参考文献

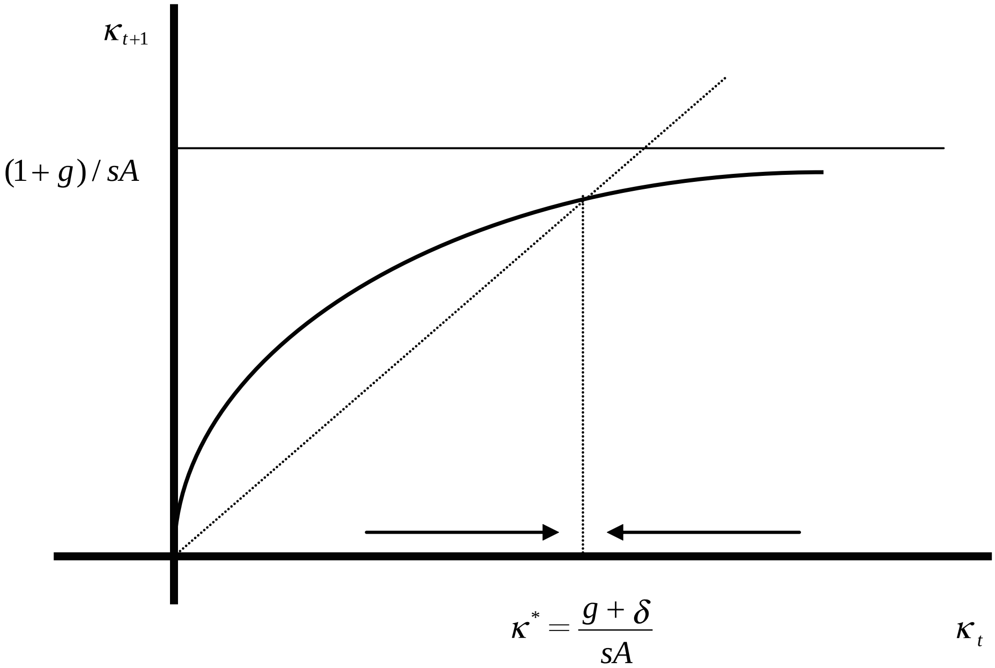
浅田統一郎（1997）『成長と循環のマクロ動学』 日本経済評論社

伊藤元重・岩井克人（1996）『現代の経済理論』 東京大学出版

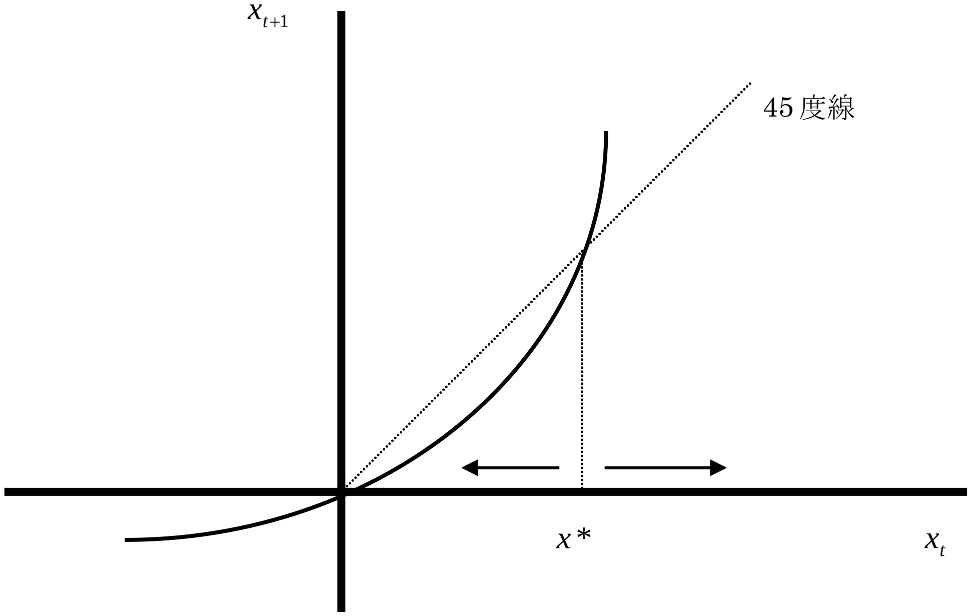
鎌田康一郎・増田宗人（2001）「統計の計測誤差がわが国のGDPギャップに与える影響」『金融研究』日本銀行金融研究所

Domar, D.（1946）“Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment”, Econometrica, Vol.14 pp137-147

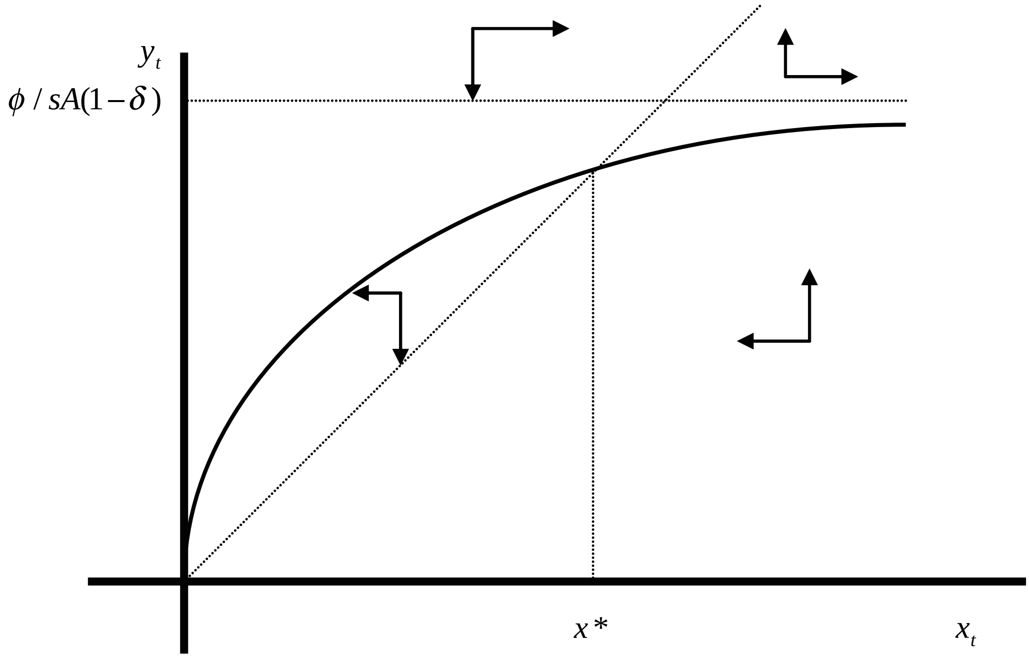
Harrod, R.（1939）“An Essay in Dynamic Theory”, Economic Journal, Vol.49, pp14-33



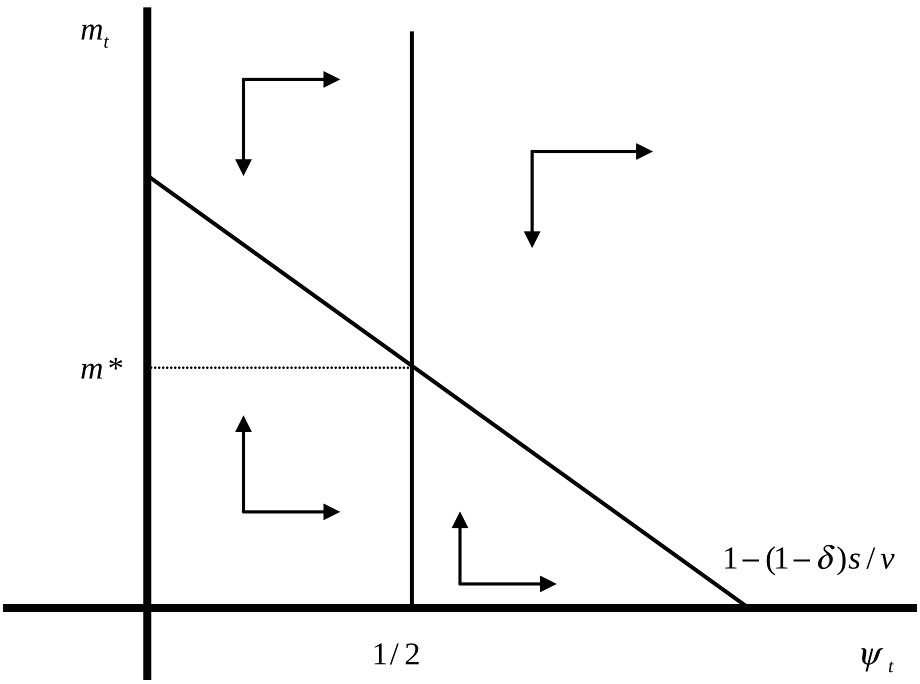
（図1：投資需要がGDPに依存する場合）



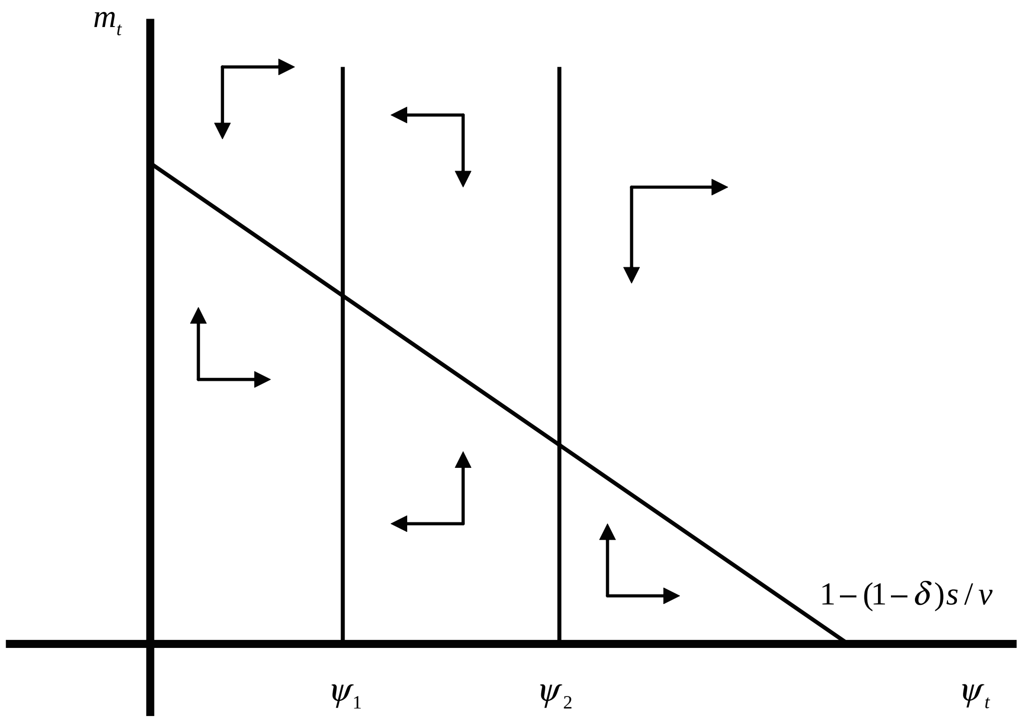
（図2：投資成長が今期の資本稼働率に依存する場合）



（図3：投資成長が前期の資本稼働率に依存する場合）



（図4.a：投資が加速度原理で決定される場合Ⅰ）



（図4.b：投資が加速度原理で決定される場合Ⅱ）